Contoh soal Subruang

1. Periksa apakah himpunan $J = \{ax^2 + bx + c \mid c^2 = a^2 + b^2\}$ merupakan subruang dari P_2.
   Ambil
   $y(x) = 4x^2 + 3x + 5 \ \in J$, dimana $5^2 = 4^2 + 3^2$ dan
   $z(x) = 6x^2 + 8x + 10 \ \in J$ dimana $10^2 = 6^2 + 8^2$
   Jumlahkan $y(x)$ dengan $z(x)$,
   $y(x) + z(x) = (4x^2 + 3x + 5) + (6x^2 + 8x + 10) = 10x^2 + 11x + 15$, dimana
   $15^2 = 225$ sedangkan
   $10^2 + 11^2 = 100 + 121 = 221$ sehingga
   $15^2 \neq 10^2 + 11^2$

   Akibatnya $y(x) + z(x) \notin J$ dan J tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan. **Kesimpulannya, J bukan subruang P_2.**

2. Buktikan apakah himpunan semua vektor di R^3 yang tegak lurus dengan $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ merupakan subruang dari R^3.
   Tuliskan $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; 3x - y + 2z = 0 \right\}$ untuk merepresentasikan hal tersebut
   - Ada $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in R^3$ yang memenuhi $3(0) - (0) + 2(0) = 0$ sehingga $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$. Jadi, $K \neq \{ \quad \}$.
   - Jelas bahwa $K \subseteq R^3$.
   - Ambil sebarang $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in K$, dengan
     $3x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$ dan $3x_2 - y_2 + 2z_2 = 0$.
     $\bar{v} + \bar{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$ dimana
     $$\begin{aligned} 3(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2) &= (3x_1 + 3x_2) - (y_1 + y_2) + (2z_1 + 2z_2) \\ &= (3x_1 - y_1 + 2z_1) + (3x_2 - y_2 + 2z_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
     Jadi, $\bar{v} + \bar{w} \in K$, maka K tertutup terhadap operasi penjumlahan.
   - Ambil sebarang $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in K$ dengan $3x_1 - y_1 + 2z_1 = 0$ dan $l \in R$
     $l\bar{v} = l \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lx_1 \\ ly_1 \\ lz_1 \end{pmatrix}$ dimana $3(lx_1) - (ly_1) + 2(lz_1) = 3lx_1 - ly_1 + 2lz_1$
     $$\begin{aligned} &= l(3x_1 - y_1 + 2z_1) \\ &= l(0) \end{aligned}$$

$$= 0$$

Jadi, $l\bar{v} \in K$, maka K tertutup terhadap operasi perkalian.

Kesimpulan : $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \,\middle|\, 3x - y + 2z = 0 \right\}$ atau semua vektor di R^3 yang tegak lurus dengan vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ merupakan subruang dari R^3.

3. Tentukan apakah himpunan semua matriks diagonal berukuran $3x3$ adalah subruang dari M_{3x3}.

   Tuliskan $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in R \right\}$ untuk merepresentasikan hal tersebut.

   - Ada $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in D$. Jadi, $D \neq \{ \quad \}$
   - Jelas bahwa $D \subseteq M_{3x3}$.
   - Ambil sebarang $P = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \in D$

     $$P + Q = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$
     $$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & b_1 + b_2 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$
     $$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

     Jadi, $P + Q \in D$, maka D tertutup terhadap operasi penjumlahan.
   - Ambil sebarang $P = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \in D$ dan $k \in R$.

     $$kP = k \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & k0 & k0 \\ k0 & kb_1 & k0 \\ k0 & k0 & kc_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & 0 & 0 \\ 0 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{bmatrix}$$

     Jadi, $kP \in D$, maka D tertutup terhadap operasi perkalian.

   Kesimpulan : $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in R \right\}$ atau himpunan semua matriks diagonal berukuran $3x3$ adalah subruang dari M_{3x3}.

4. Periksa apakah himpunan semua vektor di R^4 berbentuk $(a, b, 1,0)$ merupakan subruang dari R^4.

   Tuliskan himpunan tersebut sebagai $M = \{(a, b, 1,0) \in R^4 \mid a, b \in R\}$.

   Ambil $\bar{u} = (1,1,1,0)$ dan $\bar{v} = (3,2,1,0) \in M$.

$\bar{u} + \bar{v} = (1,1,1,0) + (3,2,1,0) = (4,3,2,0) \notin M$ sehingga M tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Kesimpulan : $M = \{(a, b, 1,0) \in R^4 \mid a, b \in R\}$ atau himpunan semua vektor di R^4 berbentuk $(a, b, 1,0)$ merupakan **bukan subruang** dari R^4.

Soal Latihan

5. Periksa apakah himpunan $A = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid ab = cd\right\}$ merupakan subruang dari M_{2x2}.

   Ambil
6. Apakah himpunan semua vektor di R^3 berbentuk $(a, 0, b)$ merupakan subruang dari R^3.
7. Tentukan apakah himpunan $C = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a = d, b = c\}$ adalah subruang dari P_3.