DETERMINAN

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran nxn. **Determinan** dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Beberapa metode untuk menghitung determinan adalah sebagai berikut

a. Metode Sarrus
b. Ekspansi Kofaktor

A. Metode Sarrus

Untuk pembahasan kali ini dikhususkan untuk matriks berukuran $2x2$ dan $3x3$ saja.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ maka

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

atau

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

dan

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}$$

atau

$$|B| = \left|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{matrix}$$
$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}$$

Contoh :

Hitunglah determinan dari

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (1)(3) - (5)(1)$$
$$= 3 - 5$$

$= -2$

dan

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{matrix}$$

$= (1)(1)(1) + (3)(2)(5) + (5)(3)(3) - (5)(1)(5) - (1)(2)(3) - (3)(3)(1)$

$= 1 + 30 + 45 - 25 - 6 - 9$

$= 36$

B. Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan dari suatu matriks, terlebih dahulu harus diketahui **minor** dan **kofaktor.**

Definisi **Minor**

Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **minor anggota** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{M_{ij}}$ dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dihilangkan dari A.

Definisi **Kofaktor**

Jika A adalah suatu matriks persegi , maka kofaktor **anggota** $\boldsymbol{a_{ij}}$ dinyatakan oleh $\boldsymbol{C_{ij}}$ merupakan bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (2)(1) = 10 - 2 = 8$

dan

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 8 = (-1)(8) = -8$

Perhatikan kembali matriks A dengan

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, maka

$$\text{Det}(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ingat bahwa

$C_{11} = (-1)^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$;

$C_{12} = (-1)^3(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = (-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = a_{23}a_{32} - a_{21}a_{33}$; dan

$C_{13} = (-1)^4(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$

Sehingga

$$\mathrm{Det}(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Dapat dilihat bahwa $\det(A)$ dapat ditentukan dengan cara mengalikan entri-entri yang ada di baris pertama A dengan **kofaktornya** kemudian menambahkan hasil kali yang didapatkan. Berdasarkan hal ini, perhitungan $\det(A)$ dilakukan dengan menggunakan **ekspansi kofaktor** sepanjang baris pertama A.

Contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)\big((6)(5) - (2)(4)\big) = 30 - 8 = 22$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\big((2)(5) - (2)(1)\big) = (-1)(10 - 2) = -8$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)\big((2)(4) - (6)(1)\big) = (8 - 6) = 2$$

sehingga $\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(22) + (1)(-8) + (-5)(2) = 44 - 8 - 10 = 26$

Teorema

Determinan suatu matriks A_{nxn} dapat dihitung denganmengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan; yaitu, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, berlaku

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$)

Contoh :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-1 diperoleh

$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)\big((6)(5) - (2)(4)\big) = 30 - 8 = 22$

$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\big((1)(5) - (-5)(4)\big) = (-1)\big(5 - (-20)\big) = -25$

$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (1)\big((1)(2) - (-5)(6)\big) = (2 - (-30)) = 32$

Sehingga

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} = (2)(22) + (2)(-25) + (1)(32) = 44 - 50 + 32 = 26$$