

PENGEMBANGAN KEMAMPUAN PEMBUKTIAN MATEMATIK MAHASISWA

Oleh

¹Rippi Maya dan ²Utari Sumarmo

¹Prodi Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah & Keguruan, UIN SGD Bandung

Email: rippi_m@yahoo.co.id

²Program Studi Pendidikan Matematika, Sekolah Pasca Sarjana, Universitas Pendidikan Indonesia

Email: utari.sumarmo@yahoo.co.id

Abstrak

Dalam rangka meningkatkan mutu pendidikan di Indonesia, khususnya pendidikan matematika, berbagai metode pembelajaran baru telah dicoba dan dipraktekkan dalam pembelajaran. Salah satu metode pembelajaran yang dirasa sesuai untuk masa kini adalah pembelajaran yang mengajarkan kemandirian berpikir kepada siswanya. Kemandirian ini dibentuk dengan jalan memotivasi siswa untuk aktif berpartisipasi dalam proses pembelajaran. Makalah ini merupakan suatu kajian teoritik, yang menawarkan suatu metode pembelajaran alternatif yang diyakini dapat membantu mahasiswa untuk aktif terlibat dalam pembelajaran.

Berdasarkan penelitian, terungkap bahwa masih banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan membuktikan. Kesulitan ini diyakini dapat diatasi dengan jalan mengembangkan kemampuan berpikirnya, khususnya kemampuan pembuktian matematikanya. Dengan belajar mandiri dan lingkungan yang mendukung mahasiswa aktif dalam proses pembelajaran, diharapkan mahasiswa dapat mengkonstruksi bukti sendiri, sehingga kemampuan pembuktian matematikanya berkembang. Salah satu metode pembelajaran alternatif yang mendukung adalah metode Moore Termodifikasi.

Kata kunci: kemampuan pembuktian matematik, belajar mandiri, metode Moore termodifikasi.

A. Pendahuluan

Sejak semester pertama di perguruan tinggi, dalam mata kuliah Kalkulus ataupun mata kuliah matematika lainnya, mahasiswa sudah diperkenalkan pada berbagai metode pembuktian. Goodaire & Parmenter (1998) membedakan metode pembuktian atas metode pembuktian secara langsung (bukti langsung dan kasus per kasus) ataupun tidak langsung (bukti dengan kontradiksi, bukti dengan menggunakan kontraposisifnya, dan bukti dengan menggunakan *counterexample*).

Memahami berbagai metode pembuktian merupakan salah satu syarat agar mahasiswa dapat memahami dan mengkonstruksi bukti dengan baik.

Memahami bukti tidak lepas dari memahami gaya bahasa yang digunakan dalam pembuktian. Seringkali mahasiswa tidak memahami bukti karena tidak memahami gaya bahasa yang terdapat dalam pembuktian. Memahami bukti di sini diartikan sebagai memahami bagaimana sistematika bukti itu dikemukakan, dan dapat mengungkapkan kembali bukti tersebut dengan pemahaman dan gaya bahasa mereka sendiri. Ketidakmampuan memahami bukti ini terlihat ketika mereka harus mengkonstruksi bukti sebuah teorema atau pernyataan matematika dengan pemahaman dan gaya bahasa mereka sendiri, mereka merasa kesulitan. Bila ditelusuri lebih jauh lagi, ternyata gaya bahasa dalam bukti suatu teorema bukan satu-satunya masalah bagi mahasiswa. Bagaimana menyusun atau mengkonstruksi suatu bukti juga merupakan masalah bagi mahasiswa. Mereka tidak paham bukti dan tidak tahu bagaimana harus memulai sebuah pembuktian.

Bila menengok kembali pembelajaran matematika siswa ketika mereka di bangku sekolah menengah atas, maka masalah pembuktian ini masih belum banyak mendapatkan perhatian. Fokus pembelajaran di sekolah masih sekitar bagaimana memahami suatu konsep, menerapkan konsep tersebut dalam contoh, dan kemudian mengerjakan soal latihan yang berkaitan dengan konsep tersebut, yang tidak jauh dari contoh soal yang sudah diberikan. Dengan kata lain, siswa masih terbiasa menganalogikan soal latihan dengan contoh soal yang sudah diberikan sebelumnya. Penganalogian ini mengakibatkan siswa menjadi kesulitan mengerjakan soal latihan yang berbeda dari contoh soal. Tidak dapat dipungkiri, pembelajaran yang menyodorkan informasi yang sudah jadi kepada siswanya, tanpa adanya kesempatan bagi siswa untuk terlibat aktif dalam pembelajaran, akan membuat siswa menjadi pasif. Mereka menjadi terbiasa dibimbing, diarahkan, dan diberi petunjuk, bila mengalami kesulitan dalam pembelajaran. Guru memegang peranan yang sangat besar dalam pembelajaran. Sebenarnya tidak ada yang salah dengan pembelajaran seperti ini, karena bagaimanapun ada materi-materi matematika yang harus diberikan secara langsung kepada siswanya (pembelajaran konvensional atau pembelajaran dengan pendekatan langsung).

Kembali pada masalah pembuktian dalam pembelajaran di perguruan tinggi. Penelitian menemukan bahwa masih banyak mahasiswa yang mengalami kesulitan dalam membuktikan (Weber (2001), Recio & Godino (2001), dan Selden & Selden (2003)). Kesulitan ini dapat dipicu oleh berbagai hal. Weber (2001) menemukan bahwa penyebab awal kegagalan mahasiswa dalam membuktikan disebabkan oleh kurangnya pengetahuan strategik. Sementara Recio & Godino (2001) menemukan bahwa kemampuan mahasiswa untuk menghasilkan bukti secara deduktif masih sangat terbatas. Selden & Selden (Weber, 2003) menyatakan bahwa mahasiswa tidak dapat menentukan apakah bukti yang dimaksud sah atau tidak.

Mahasiswa sering mengatakan bahwa mereka dapat memahami bukti yang diberikan dosen di depan kelas, tetapi ketika mereka disuruh melakukannya di rumah, mereka mengalami kesulitan membuktikan sendiri (Barnard, 2000). Mahasiswa paham dengan langkah-langkah yang digunakan pengajar dalam menjelaskan proses pembuktian. Tetapi ketika mereka diberikan pekerjaan rumah

tentang pembuktian, mereka tidak tahu harus mulai dari mana. Mereka tidak mempunyai ide, konsep matematik yang mana yang harus diambil untuk memulai sebuah pembuktian. Kesulitan mahasiswa dalam membuktikan, sebagian besar disebabkan karena mereka tidak dapat melihat lebih jauh tentang pernyataan-pernyataan matematik (teorema), bukan karena mereka tidak memahami pernyataan-pernyataan yang terlibat. Selain itu, kebiasaan mahasiswa hanya mencatat saja penjelasan dari pengajar tanpa ikut aktif terlibat dalam proses pembelajaran, diyakini Moore (Weber, 2003) dan teman-temannya menjadi salah satu penyebab mahasiswa mengalami kesulitan dalam membuktikan. Moore mengungkapkan bahwa siswa hanya akan mendapatkan sedikit pelajaran tentang matematika lanjut (*advanced mathematics*), bila mereka secara pasif hanya menulis bukti yang diberikan oleh pengajarnya di papan tulis, sementara siswa akan banyak belajar tentang konsep matematik dan bukti apabila mereka mencoba mengkonstruksi bukti sendiri.

Masalah kesulitan membuktikan dapat diatasi, salah satunya dengan meningkatkan kemampuan pemahaman matematik mereka. Bila mahasiswa memahami konsep matematika dengan baik, maka diharapkan mereka dapat memahami bukti dan melakukan pembuktian dengan baik. Untuk meningkatkan atau mengembangkan kemampuan pemahaman matematik mereka, perlu diupayakan suatu pembelajaran yang memberi kesempatan kepada siswa untuk berpikir mandiri dan terlibat aktif dalam pembelajaran. Menurut penelitian (Maya, 2006), apabila siswa diberi kesempatan untuk secara aktif terlibat dalam pembelajaran (pembelajaran dengan pendekatan tidak langsung), di mana guru atau pengajar hanya berperan sebagai motivator, fasilitator, yang mengarahkan siswanya untuk memahami suatu konsep secara mandiri dan sedikit bantuan dari pengajar, pemahaman matematik siswa justru akan berkembang lebih baik.

B. Bukti dan Pembuktian

Apakah sebenarnya bukti (*proof*) itu? Menurut kamus Collins Cobuild, "*Proof is evidence or fact that show that it is true or that it exists*". Sementara membuktikan (*to prove*) bahwa sesuatu itu benar berarti menunjukkan dengan pasti bahwa itu betul atau benar, sebagaimana dinyatakan dalam kamus yang sama, "*To prove that something is true or correct means to show definitely that it is true or correct*". Dalam konteks matematika, beberapa matematikawan mendefinisikan bukti secara berbeda. Wilder (1944:319) mengemukakan, "... proof in mathematics is nothing but a testing of the products of our intuition". Sementara Tall (1989:8) menyatakan, "Proof means being precise about arguments and getting things right". Dari Wilder dan Tall tersebut, didapatkan tiga hal berkaitan dengan bukti dalam matematik, yaitu mengenai ketepatan argumen (*precise arguments*), mendapatkan sesuatu secara benar (*getting things right*), dan menguji hasil atau intuisi (*testing of the products of our intuition*).

Berkaitan dengan kebenaran, Troelstra dan van Dalen (Artemov, 2001:1) mempunyai pendapat lain mengenai bukti dalam matematika. Ia mengemukakan dalam bukunya, *Constructivism in Mathematics*, bahwa suatu pernyataan dikatakan benar bila kita mempunyai bukti terhadap pernyataan tersebut, dan

pernyataan itu salah bila kita dapat menunjukkan bahwa asumsi adanya bukti dari pernyataan tersebut mengarah kepada suatu kontradiksi.

Selain makna bukti sebagaimana dikemukakan oleh Wilder, Tall, Troelstra dan van Dalen, terdapat pandangan tradisional tentang bukti dalam matematika yang berkaitan dengan formal dan penalaran. Pandangan tradisional tentang bukti matematik ini mengungkapkan adanya formalitas dari bukti. Bukti merupakan garis logis dari penalaran, yang dimulai dengan sebuah himpunan aksioma dan bergerak melalui tahapan logis kepada suatu kesimpulan, sebagaimana diungkapkan oleh Griffiths (Weber, 2003:1). Selain makna formalitas yang dikemukakan oleh Griffith, bukti juga berkaitan dengan konfirmasi kebenaran. Menurut Griffith, bukti itu mengkonfirmasi kebenaran bagi seorang matematikawan, sebagaimana percobaan atau observasi mengungkapkan kebenaran bagi ahli ilmu alam.

Beranjak dari makna bukti dalam matematika, perlu diketahui apakah sebenarnya fungsi tersebut dalam matematika. Mengapa ia begitu penting dalam matematika. Menurut Hanna dan Barbeau, fungsi bukti yaitu:

1. sebagai verifikasi, yaitu memvalidasi kebenaran;
2. penjelasan: menjawab pertanyaan “mengapa”;
3. meyakinkan: menghilangkan keraguan;
4. sistematisasi: menyesuaikan hasil matematik untuk konteks yang lebih luas;
5. penemuan: menciptakan hasil baru;
6. komunikasi: menyampaikan pengetahuan dan pemahaman matematik;
7. kesenangan: bertemu saingan intelektual secara elegan.

Dengan mengenali fungsi pembuktian dalam matematika, mahasiswa akan termotivasi untuk dapat mengkonstruksi bukti dengan baik.

C. Pengembangan Kemampuan Pembuktian

Mengenai pentingnya kemampuan pembuktian dikembangkan, perlu diperhatikan pernyataan yang dikemukakan oleh Solow berikut ini. Solow (1990) menyatakan bahwa matematika adalah bahasa para matematikawan, sementara pembuktian adalah suatu metode penyampaian kebenaran matematik kepada orang lain yang juga “berbicara” dengan bahasa yang sama. Sifat bahasa matematika yang mengagumkan adalah ketepatannya. Dengan dipresentasikan secara tepat (sesuai), suatu pembuktian tidak akan memuat kata-kata yang mendua arti (ambigo). Tidak akan ada keraguan atas kebenarannya. Sayangnya, masih banyak pembuktian yang dinyatakan secara kurang sesuai. Dengan kata lain, pembuktian dinyatakan secara tepat hanya untuk orang yang telah mengetahui bahasa matematika. Oleh sebab itu, untuk dapat memahami atau mengemukakan sebuah pembuktian, seorang siswa harus belajar bahasa baru, yaitu metode pemikiran yang baru, yang mengajarkan bagaimana membaca dan memahami sebuah bukti tertulis dengan mengidentifikasi teknik-teknik atau metode pembuktian yang digunakan. Diharapkan dengan menguasai metode pemikiran ini, kemampuan pembuktian seseorang akan berkembang lebih baik.

Penguasaan terhadap teknik-teknik maupun metode pembuktian, merupakan salah satu syarat agar kemampuan pembuktian mahasiswa berkembang. Teknik atau metoda pembuktian dapat diajarkan pada semester awal perkuliahan. Marty (Weber, 2003), Baker dan Campbell (2004) telah melakukan penelitian untuk mengembangkan kemampuan ini, yaitu dengan mengadakan kuliah Pengantar Bukti (oleh Marty) dan kuliah Pengantar Matematika Lanjut (oleh Baker & Campbell). Hasilnya, siswa memiliki kemampuan pembuktian lebih baik.

Selain itu, lingkungan pembelajaran yang mendukung juga akan membantu mengembangkan kemampuan pembuktian matematik mahasiswa. Mendukung dalam arti pembelajaran memberi kesempatan kepada siswa untuk memahami, mengeksplor, mengemukakan ide-idenya tentang pembuktian dengan bahasa mereka sendiri. Moore (Mahavie, 1999) dan Alibert (Weber, 2003) mengemukakan tentang bagaimana membentuk lingkungan yang mendukung proses pembelajaran. Alibert dengan metode *debat scientific*nya, menciptakan suatu lingkungan di mana siswa diberi kesempatan untuk merespon terhadap suatu proposisi yang mungkin benar atau salah, yang diberikan oleh pengajar. Siswa menyampaikan konjekturnya masing-masing, dan mempertahankan argumennya untuk meyakinkan teman-teman sekelasnya. Penciptaan lingkungan yang mendukung ini diakui Alibert menjadikan siswanya mengenali kebutuhan akan ketepatan definisi, argumen yang jelas, dan bukti yang tepat sebagai alat untuk memutuskan apakah suatu konjektur benar atau salah. Moore menciptakan suatu lingkungan pembelajaran yang membuat siswa aktif dalam proses pembelajaran. Lingkungan pembelajaran ini dapat diwujudkan melalui pembelajaran dengan metode Moore termodifikasi (*Modified Moore Method*).

D. Metode Moore Termodifikasi

Metode Moore sebenarnya bukan metode yang baru. Metode ini dikembangkan oleh R.L. Moore di University of Pennsylvania pada tahun 1911-1916, dan diajarkan di University of Texas dari tahun 1916 sampai pensiunnya pada tahun 1969 (Mahavie, May, & Parker, 2006). Pada awalnya, metode Moore ini diperuntukkan bagi mahasiswa program doktor. Tetapi dalam perkembangannya, metode ini dapat diterapkan pada mahasiswa S1 (*undergraduate*), bahkan pada siswa sekolah menengah atas. Dalam memberlakukan metode ini, ada tiga aturan yang perlu diterapkan. Aturan pertama adalah tidak menganjurkan mahasiswa menggunakan buku teks selama proses pembelajaran. Namun syarat pertama ini bisa ditawar, dalam arti apabila keadaan memaksa, maka mahasiswa dapat melihat buku teks atas seijin pengajar. Pengecualian ini diperbolehkan dalam pembelajaran di kelas Moore. Mahasiswa Moore dari program doktor boleh merujuk pada literatur hanya untuk meyakinkan bahwa disertasinya benar-benar orisinal (bukan jiplakan). Aturan ke-dua, pembelajaran dilakukan dalam kelas kecil (kurang dari 24 siswa). Aturan ke-tiga adalah tidak boleh ada kolaborasi di antara mahasiswa (Mahavie, May & Parker, 2006).

Pada dasarnya, metode Moore merupakan salah satu pendekatan pembelajaran tidak langsung, di mana pembelajaran berpusat pada siswa (*student*

centered). Perbedaannya hanya pada bagaimana siswa mengkomunikasikan hasil pembuktiannya secara tertulis dan lisan. Secara tertulis, mahasiswa menuliskan hasil pekerjaannya di papan tulis, kemudian menjelaskannya kepada teman-temannya. Dalam hal ini, mahasiswa yang sedang presentasi harus mampu mempertahankan argumennya di depan teman-temannya. Dalam pembelajaran ini, mahasiswa tidak lagi berperan sebagai penerima informasi saja (bersifat pasif), tetapi mereka berperan secara aktif sebagai pencipta pengetahuan (*creators of knowledge*), sebagaimana diungkapkan oleh Mahavier, May, dan Parker (2006:1), “...the Moore method has the power to transform students from recipients of information to creators of knowledge...”.

Mahavier, May, dan Parker (2006) menyatakan bahwa metode Moore merupakan metode pedagogi yang efektif, dalam membangkitkan minat siswa untuk bertanya, bereksplorasi, menemukan (*discover*), dan mengembangkan matematika dengan kemampuannya sendiri. Ungkapan Moore yang terkenal adalah bahwa siswa yang diajar paling baik adalah yang diberitahu paling sedikit, “*That student is taught the best who is told the least*”.

E. Pembelajaran dengan Metode Moore Termodifikasi

Pembelajaran dengan metode ini pada prinsipnya adalah untuk mengembangkan kemampuan berpikir mahasiswa, khususnya kemampuan pemahaman dan pembuktian matematik. Untuk tujuan tersebut, pembelajaran yang berpusat pada siswa (*student centered learning*) merupakan titik awal bagi pengajar untuk menyusun tujuan bagi siswa. Pembelajaran yang berpusat pada siswa tersebut dapat diklasifikasikan sebagai berikut (Mahavier, May & Parker, 2006), yaitu:

1. Siswa mengembangkan sebuah solusi dan argumen yang mendukung secara mandiri. Kerja keras dan pengetahuan prasyarat yang memadai adalah syarat untuk mengembangkan ketrampilan ini.
2. Siswa mengkomunikasikan solusi tersebut melalui argumen yang mendukung. Komunikasi ini dilakukan secara tertulis dan lisan kepada teman-temannya di kelas.
3. Siswa mempertahankan argumennya. Selama proses ini, presentasi adalah cara yang tepat untuk meyakinkan teman-temannya akan kebenaran solusinya atau mahasiswa harus mempertahankan solusinya.

Peran pengajar dalam pembelajaran dengan metode Moore termodifikasi ini adalah:

1. Memfasilitasi dan memotivasi (*encourage*) diskusi kelas.
2. Menjelaskan hal-hal penting dan memberi sedikit petunjuk atau arahan terhadap pertanyaan yang diajukan oleh siswa selama presentasi siswa (tidak menjawab, hanya mengarahkan).
3. Menciptakan lingkungan yang mendukung proses pembelajaran tersebut.

Pengajar bukan sebagai pusat perhatian dan tidak dianjurkan untuk berbicara (menyampaikan informasi) melebihi yang dibutuhkan mahasiswa untuk dapat mengembangkan solusinya/argumennya. Pengecualian diperbolehkan ketika guru menetapkan (menyetujui) suatu solusi yang dengan sukses telah diselesaikan oleh

mahasiswa atau mengelaborasi sebuah argumen untuk mendapatkan perspektif yang lebih luas. Mahasiswa hendaknya dapat bekerja sendiri, tanpa kehadiran guru di kelas dalam beberapa minggu. Agar pembelajaran dengan metode ini berhasil, perlu adanya **kesabaran** yang tinggi dari pengajar matematika yang bersangkutan.

F. Penutup

Dari penjelasan mengenai apakah sebenarnya bukti itu, kemudian mengenali kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam membuktikan, dan menawarkan suatu metode pembelajaran untuk mengatasi kesulitan dalam membuktikan, diharapkan kemampuan pembuktian matematik mahasiswa berkembang. Dengan mengenal bermacam-macam bentuk pembuktian, memahami konsep dasar yang membangun sebuah bukti, akan membantu mahasiswa mengatasi kesulitannya dalam membuktikan. Hal yang penting untuk diingat adalah bahwa bukti matematik berkaitan dengan kegiatan manusia (*human activities*), sehingga tidak ada metode yang pasti dan tunggal dalam mengajarkan pembuktian. Keaktifan mahasiswa dalam belajar bukti memegang peranan yang sangat penting dalam mengembangkan kemampuannya dalam membuktikan.

G. Daftar Pustaka

- Artemov, S.N. (2001). Explicit Provability and Constructive Semantic. Dalam *The Bulletin of Symbolic Logic* [Online], *Vo. 7, No. 1. (Mar., 2001)*, pp. 1-36. Tersedia: <http://www.jstor.org> [6 Maret 2007]
- Baker, D. & Campbell, C. (2004). Fostering The Development of Mathematical Thinking: Observations from A Proofs Course. Dalam *Primus: Problem, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduates Studies*. [Online]. Tersedia: http://findarticles.com/p/articles/mi_qa3997/is_200412/ai_n9467980 [13 Februari 2007]
- Barnard, T. (2000). Why Are Proofs Difficult?. Dalam *The Mathematical Gazette* [Online], Vol. 84, No. 501 (Nov., 2000), pp. 415-422. Tersedia: <http://www.jstor.org> [13 Februari 2007]
- Hanna, Gila & Barbeau, Ed. Proof in Mathematics. [Online]. Tersedia: <http://www.math.utoronto.ca/barbeau/hannajoint.pdf> [25 April 2007]
- Mahavier, W.T., May, E.L., & Parker, G.E. (2006). A Quick-Start Guide to the Moore Method. [Online]. Tersedia: http://www.discovery.utexas.edu/rlm/reference/quick_start-3.pdf [20 Juni 2007]

- Maya, Rippi (2006). *Pembelajaran dengan Pendekatan Kombinasi Langsung-Tidak Langsung untuk Mengembangkan Kemampuan Berpikir Matematik Siswa SMA*. Tesis pada PPS UPI. Bandung: tidak diterbitkan.
- Recio, A.M. & Godino, J.D. (2001). Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof. Dalam *Educational Studies in Mathematics* [Online], Volume 48: 83-99. Tersedia: <http://www.jstor.org> [6 Maret 2007]
- Selden, John & Selden, Annie (1995). Unpacking The Logic of Statement. Dalam *Educational Studies in Mathematics* [Online], Vol. 29, No. 2, Advanced Mathematical Thinking. (Sep.,1995), pp. 123-151. Tersedia: <http://www.jstor.org> [6 Maret 2007]
- Solow, Daniel (1990). *How to Read dan Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. Kanada: John Wiley & Sons, Inc.
- Tall, D. (1989). The Nature of Mathematical Proof. Dalam *Mathematics Teaching* [Online], 127, 28-32. Tersedia: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1989a-nature-proof-mt.pdf> [6 Maret 2007]
- Weber, K. (2001). Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge. Dalam *Educational Studies in Mathematics* [Online], Volume 48: 101-119. Tersedia: <http://www.jstor.org> [6 Maret 2007]
- _____ (2003). Students' Difficulties with Proof. [Online]. Tersedia: http://www.maa.org/t_and_l/rs_8.html [7 Februari 2007]
- Wilder, R.L. (1944). The Nature of Mathematical Proof. Dalam *The American Mathematical Monthly* [Online], Vol. 51, No. 6. (Jun. – Jul., 1944), pp. 309 – 323. Tersedia: <http://www.jstor.org> [6 Maret 2007]