

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 10

**Ekspektasi Dua Peubah Acak: Perkalian
Dua Momen, Kovarians, Varians
Bersyarat**

A. Perkalian Dua Momen

Definisi: Perkalian Dua Momen Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p(x,y)$ adalah nilai fungsi peluang gabungan dari (X, Y) di (x,y) , μ_x adalah rata-rata dari X dan μ_y adalah rata-rata dari Y ; maka perkalian dua momen sekitar pusat ke- r dan ke- s dari X , dan Y (dinotasikan dengan $\mu'_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \sum_x \sum_y x^r y^s \cdot p(x, y)$$

Dan perkalian momen sekitar rata-rata ke- r dan ke- s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{r,s} = E((X - \mu_x)^r (Y - \mu_y)^s) = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)^r (y - \mu_y)^s \cdot p(x, y)$$

A. Perkalian Dua Momen

Definisi : Perkalian Dua Momen Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $f(x,y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan dari (X, Y) di (x,y) , μ_x adalah rata-rata dari X dan μ_y adalah rata-rata dari Y ; maka perkalian dua momen sekitar pusat ke- r dan ke- s dari X , dan Y (dinotasikan dengan $\mu'_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s \cdot f(x, y) \, dx \, dy$$

Dan perkalian momen sekitar rata-rata ke- r dan ke- s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut:

$$\mu_{r,s} = E\left((X - \mu_x)^r (Y - \mu_y)^s\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^r (y - \mu_y)^s \cdot f(x, y) \, dx \, dy$$

B. Kovarians

Definisi 1: Kovarians

Perkalian momen sekitar rata-rata ke-1 dan ke-1 dari peubah acak X dan Y disebut kovarians dari X dan Y dan dinotasikan dengan $Kov(X,Y)$ atau σ_{xy} , dengan $Kov(X,Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

Definisi 2: Kovarians Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p(x,y)$ adalah fungsi peluang dari X di x , maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$Kov(X,Y) = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot p(x,y)$$

Perumusan Kovarians Umum

$$Kov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu_x \mu_y$$

Definisi 3: Kovarians Kontinu:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $f(x,y)$ adalah fungsi peluang dari X di x , maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) \cdot f(x,y) dx dy$$

C. Varians Bersyarat

Definisi 1: Varians Bersyarat Umum

Jika X dan Y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka varians bersyarat dari X diberikan $Y=y$ didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(X|y) = E[\{X - E(X|y)\}^2|y] \quad \text{atau}$$

$$\text{Var}(X|y) = E(X^2|y) - [E(X|y)|y]^2$$

Dan varians bersyarat dari Y diberikan $X = x$ didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(Y|x) = E[\{Y - E(Y|x)\}^2|x] \quad \text{atau}$$

$$\text{Var}(Y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)|x]^2$$

Definisi 2: Varians Bersyarat Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p'(x|y)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x , dan $p''(y|x)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y , maka varians bersyarat dari X diberikam $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Var}(X|y) = \sum_x [x - E(X|y)]^2 \cdot p'(x|y)$$

dan varians bersyarat dari Y diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai:

$$\text{Var}(Y|x) = \sum_y [y - E(Y|x)]^2 \cdot p''(y|x)$$

Definisi 3 : Varians Bersyarat Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $g(x|y)$ adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x, dan $h(y|x)$ adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y, maka varians bersyarat dari X diberikam $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\text{Var}(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X|y)]^2 \cdot g(x|y) dx$$

Dan varians bersyarat dari Y diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai:

$$\text{Var}(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y|x)]^2 \cdot h(y|x) dy$$