

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 3

Perhitungan Peluang: Peluang bersyarat, Peluang

Dua Peristiwa yang Saling Bebas, Dalil Bayes

A. Peluang Bersyarat

Definisi:

Jika A dan B adalah dua buah peristiwa dalam ruang sampel S dan $P(A) \neq 0$, maka peluang bersyarat dari B diberikan A didefinisikan sebagai :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ atau } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dalil:

Jika A_1, A_2 dan A_3 adalah tiga buah peristiwa dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $P(A) \neq 0$ dan $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$, maka

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Untuk m buah peristiwa $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

B. Peluang Dua Peristiwa yang Saling Bebas

Definisi 1:

Dua peristiwa A dan B dikatakan peristiwa yang saling bebas, jika dan hanya jika: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Definisi 2:

Tiga buah peristiwa A, B dan C dikatakan saling bebas, jika dan hanya jika dipenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. Peristiwa yang berpasangan bebas, yaitu:
 - a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 - b. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
 - c. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

C. Dalil Bayes

Definisi 1: **Partisi**

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dikatakan partisi dari ruang sampel S , jika :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$, untuk semua $i \neq j$
- Untuk $\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = S$
- $P(B_i) > 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$

Definisi 2: **Total Peluang**

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dikatakan partisi dari ruang sampel S , maka peluang dari peristiwa A yang sembarang dari S adalah :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_k \cap A) \\ &= \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) \\ P(A) &= \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i) \end{aligned}$$

Definisi 3: **Aturan Bayes**

Jika peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S sedemikian sehingga $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$, maka untuk peristiwa A sembarang dari S sedemikian hingga $P(A) \neq 0$, berlaku :

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r) \cdot P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$$

Untuk $r = 1, 2, 3, \dots, k$

Soal:

1. Sebuah dadu bermata enam dilempar. Apabila A adalah kejadian muncul mata dadu bilangan genap dan B adalah kejadian muncul mata dadu bil prima, maka tentukan apakah A dan B saling lepas ?
2. Sebuah tas berisi 10 bola hitam dan 6 bola putih. Diambil secara acak dua kali berturut-turut masing-masing satu bola, tanpa pengembalian. Berapa peluang mendapatkan kedua bola putih ?
3. Sebuah dadu dilemparkan sekali, berapa peluang muncul mata dadu :
 - a. Kurang dari 3 atau lebih dari 5 ?
 - b. Ganjil atau prima ?

Soal:

4. Misalkan kita melakukan pengundian sebuah dadu. Jika :
 B_1 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling banyak 2,
 B_2 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling sedikit 3 dan paling banyak 5,
 B_3 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu yang tertinggi,
Coba selidiki apakah peristiwa B_1 , B_2 dan B_3 merupakan partisi ruang sampel S ?
5. Kotak A berisi 2 bola hitam dan 3 bola putih.
Kotak B berisi 4 bola hitam dan 1 bola putih.
Kotak C berisi 3 bola hitam dan 4 bola putih.
Kemudian sebuah kotak dipilih secara acak dan sebuah bola diambil dari kotak yang terpilih itu.
- Berapa peluang bahwa bola yang terambil itu berwarna putih?
 - Jika bola yang terambil itu berwarna putih, maka hitung peluang bahwa bola itu berasal dari kotak A? Kotak B? Kotak C?