

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 5

Distribusi Dua Peubah Acak

A. Distribusi Gabungan

Definisi 1: Peubah Acak Berdimensi Dua

Jika S merupakan ruang sampel dari sebuah eksperimen, maka pasangan (X,Y) dinamakan peubah acak berdimensi dua, jika X dan Y masing-masing menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap anggota S .

Definisi 2: Peubah Acak Diskrit Berdimensi Dua

(X,Y) disebut peubah acak diskrit berdimensi dua, jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari (X,Y) salah satunya berhingga atau tidak berhingga tetapi dapat dihitung disebut peubah acak diskrit berdimensi dua.

Contoh 1:

Sebuah kotak berisi 3 bola bernomor 1, 2, 3. Kemudian diambil dua bola secara acak dengan pengembalian. Misalkan peubah acak X menyatakan bilangan pada pengambilan bola pertama dan peubah acak Y menyatakan bilangan pada pengambilan bola kedua.

A. Distribusi Gabungan

Definisi 3: Peubah Acak Kontinu Berdimensi Dua

(X,Y) disebut peubah acak kontinu berdimensi dua, jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari X dan Y masing-masing berbentuk sebuah interval.

Contoh 2:

Dalam tubuh seorang wanita yang sehat berusia 20 sampai 29 tahun, kadar kalsium dalam darahnya, yaitu X, biasanya antara 8,5 dan 10,5 mg/dl, sedangkan kadar kolesterolnya, yaitu Y, biasanya antara 120 dan 240 mg/dl

Definisi 4: Fungsi Peluang Gabungan

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, maka fungsi yang dinyatakan dengan $p(x,y) = P(X = x, Y = y)$ untuk setiap pasangan nilai (x,y) dalam daerah hasil dari X dan Y, dinamakan fungsi peluang.

A. Distribusi Gabungan

Sifat-sifat Fungsi Peluang Gabungan:

1. $P(x,y) \geq 0$, untuk setiap pasangan nilai (x,y) dalam daerah asalnya.
2. Untuk
$$\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$$

Contoh 3:

Fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk :

$P(x,y) = c(x+2y)$; $x=0,1,2,3$ dan $y= 0,1,2,3$

- a. Tentukan nilai konstanta c
- b. Hitung $P(X=2, Y=1)$
- c. Hitung $P(X \geq 1, Y \leq 2)$

Definisi 4: Fungsi Densitas Gabungan

Sebuah fungsi yang melibatkan dua peubah acak X dan Y dengan nilai-nilainya dinyatakan dalam bidang xy dinamakan fungsi densitas gabungan, jika dan hanya jika:

$$P[(x,y) \in A] = \int_A \int f(x,y) dx dy$$

A terletak dalam bidang xy

A. Distribusi Gabungan

Sifat-sifat Fungsi Densitas Gabungan:

1. $f(x, y) \geq 0, \text{ untuk } -\infty < x, y < \infty$

2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

Contoh 4:

Misalkan fungsi densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$f(x, y) = cxy ; 0 < x < 3, 1 < y < 4$$
$$= 0 ; x, y \text{ lainnya}$$

a. Tentukan nilai konstanta c

b. Hitung $P[(X, Y) \in A]$, dengan A adalah daerah $\{(x, y); 0 < x < 2, 2 < y < 3\}$

B. Distribusi Marginal

Apabila kita mempunyai distribusi gabungan dari dua peubah acak X dan Y (bisa diskrit semua atau kontinu semua), maka kita dapat menentukan distribusi peubah acak X dan distribusi peubah acak Y . Distribusi yang diperoleh dengan cara demikian dinamakan *distribusi marginal*.

Definisi 1: Fungsi Peluang Marginal

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit dan $p(x,y)$ adalah nilai dari fungsi peluang gabungannya di (x,y) , maka fungsi yang dirumuskan dengan :

$$p_1(x) = \sum_y p(x, y)$$

Untuk setiap x dalam daerah hasil X dinamakan fungsi peluang marginal dari X . Adapun fungsi yang dirumuskan dengan :

$$p_2(y) = \sum_x p(x, y)$$

Untuk setiap y dalam daerah hasil Y dinamakan fungsi peluang marginal dari Y .

B. Distribusi Marginal

Contoh1:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (1/72) (x + 2y); \quad \begin{matrix} x = 0, 1, 2, 3 \\ y = 0, 1, 2, 3 \end{matrix}$$

- Tentukan fungsi peluang marginal dari X
- Tentukan fungsi peluang marginal dari Y

Definisi 2: Fungsi Densitas Marginal

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dan $f(x,y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan di (x,y) , maka fungsi yang dirumuskan dengan :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy; \quad -\infty < x < \infty \quad \text{dinamakan fungsi densitas marginal dari } X$$

Adapun fungsi yang dirumuskan dengan

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx; \quad -\infty < y < \infty \quad \text{dinamakan fungsi densitas marginal dari } Y$$

B. Distribusi Marginal

$g(x)$ dan $h(y)$ masing-masing merupakan fungsi densitas, maka:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy = 1$$

Contoh2:

Misalkan fungsi densitas gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (4/35)xy; \quad 0 < x < 3, 1 < y < 4 \\ &= 0 \quad \quad \quad ; \quad x \text{ lainnya} \end{aligned}$$

- a. Tentukan fungsi densitas marginal dari X
- b. Tentukan fungsi densitas marginal dari Y

C. Distribusi Bersyarat

Definisi 1: Fungsi Peluang Bersyarat

Jika $p(x,y)$ adalah nilai fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit X dan Y di (x,y) dan $p_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari Y di y , maka fungsi yang dinyatakan dengan

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p_2(y)} \quad ; \quad p_2(y) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X , dinamakan fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y = y$.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x , maka fungsi yang dirumuskan

$$p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p_1(x)} \quad ; \quad p_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah Y , dinamakan fungsi peluang bersyarat dai Y diberikan $X = x$.

C. Distribusi Bersyarat

Definisi 2: Fungsi Densitas Bersyarat

Jika $f(x,y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu X dan Y di (x,y) dan $f_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari Y di y , maka fungsi yang dinyatakan dengan

$$p(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad ; f_2(y) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X , dinamakan fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y = y$.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x , maka fungsi yang dirumuskan

$$p(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \quad ; f_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah Y , dinamakan fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X = x$.

C. Distribusi Bersyarat

Contoh:

1. Misalkan fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (1/21) (x + y) ; x = 1, 2, 3; y = 1, 2$$

- a. Tentukan $p(x|y)$
- b. Tentukan $p(y|x)$
- c. Hitunglah $p(x|y = 1)$

2. Diketahui fungsi densitas gabungan dari X dan Y adalah

$$f(x,y) = 4xy ; 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ = 0 ; x \text{ lainnya}$$

- a. Tentukan $g(x|y)$
- b. Tentukan $h(y|x)$

D. Kebebasan Stokastik

Definisi 1: Kebebasan Stokastik Diskrit

Misalkan dua peubah acak diskrit X dan Y mempunyai nilai fungsi peluang gabungan di (x,y) , yaitu $p(x,y)$ serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari X di x , yaitu $p_1(x)$ dan nilai fungsi peluang marginal dari Y di y , yaitu $p_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$p(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$$

Untuk semua pasangan nilai (x,y)

Contoh 1:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (1/72) (x+2y); x = 0, 1, 2, 3 ; y = 0, 1, 2, 3$$

Apakah X dan Y bebas stokastik?

D. Kebebasan Stokastik

Definisi 2: Kebebasan Stokastik Kontinu

Misalkan dua peubah acak kontinu X dan Y mempunyai nilai fungsi densitas gabungan di (x,y) , yaitu $f(x,y)$ serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari X di x , yaitu $f_1(x)$ dan nilai fungsi peluang marginal dari Y di y , yaitu $f_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Contoh 2:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$f(x,y) = x + y; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1$$

Apakah X dan Y bebas stokastik?