

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 6

Ekspektasi Satu Peubah Acak Diskrit

A. Nilai Ekspektasi

Definisi:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluangnya di x adalah $p(x)$ dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka nilai ekspektasi dari $u(X)$, dinotasikan dengan $E[u(x)]$, didefinisikan sebagai:

$$E[u(x)] = \sum_x u(x) \cdot p(x)$$

Contoh 1:

Misalkan fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

$$p(x) = x/15 ; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$

A. Nilai Ekspektasi

Sifat-sifat Nilai Ekspektasi:

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka $E(c) = c$
2. Jika c adalah sebuah konstanta dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka:
 $E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)]$
3. Jika c_1 dan c_2 adalah dua buah konstanta dan $u_1(X)$ dan $u_2(X)$ adalah dua buah fungsi dari X , maka:

$$E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] = c_1 \cdot E[u_1(X)] + c_2 \cdot E[u_2(X)]$$

Contoh 2:

Lihat kembali soal pada contoh 1

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$ dengan menggunakan sifat-sifat nilai ekspektasi

B. Rataan

Definisi:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah $p(x)$, maka rataan dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x)$$

Contoh:

Jika Sandi mengundi sebuah dadu seimbang, maka tentukan rataan dari munculnya angka pada mata dadu itu!

C. Varians

Definisi 1: Varians

Misalnya X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ \text{atau} \quad \text{VAr}(X) &= E(X - \mu)^2 \end{aligned}$$

C. Varians

Definisi 2 :Varians Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$Var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot p(x)$$

Sifat-sifat Varians :

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka $Var(c) = 0$
2. Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:
$$Var(X + c) = Var(X)$$
3. Jika a dan b adalah dua buah konstanta dan X adalah peubah acak, maka:
$$Var(aX + b) = a^2 \cdot Var(X)$$

Contoh:

Misalnya distribusi peluang dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

x	1	2	3
$p(x)$	1/2	1/3	1/6

Hitung $Var(X)$!

D. Momen

Definisi 1: Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupu kontinu, maka momen ke- k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E(X^k), k = 1, 2, 3, \dots$$

Definisi 2: Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka momen ke- k (dinotasikan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = \sum_x x^k \cdot p(x)$$

Definisi 3: Momen Sekitar Rataan Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka momen sekitar rataan ke- k (dinotasikan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu_k = \sum_x (x - \mu)^k \cdot p(x)$$

D. Momen

Contoh:

1. Berikut ini diberikan distribusi peluang dari peubah acak X

x	1	2	3	4
$p(x)$	1/4	1/8	1/8	1/2

Hitunglah nilai μ'_3

2. Misalkan ufngsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x) = 1/3 ; x = 1, 2, 3$$

Hitung μ_3

E. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 1: Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupu kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E(e^{tX}),$$

untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$

Definisi 2: Fungsi Pembangkit Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah fungsi peluang dari X di x , maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} \cdot p(x)$$

E. Fungsi Pembangkit Momen

Penurunan Momen dari Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupu kontinu dan $M_x(t)$ adalah fungsi pembangkit momennya, maka

$$M'_x(t)]_{t=0} = \mu'_r$$

Contoh:

Misalkan fungsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x) = \frac{1}{4} \binom{2}{x}; x = 0, 1, 2$$

- Tentukan fungsi pembangkit momen dari X
- Hitung μ'_1 dan μ'_2 berdasarkan hasil fungsi pembangkit momen