

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 7

Ekspektasi Satu Peubah Acak Kontinu

A. Nilai Ekspektasi

Definisi:

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitasnya di x adalah $f(x)$ dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka nilai ekspektasi dari $u(X)$, dinotasikan dengan $E[u(x)]$, didefinisikan sebagai:

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx$$

Contoh 1:

Misalkan fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$$f(x) = 2(1 - x) ; 0 < x < 1$$

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$

A. Nilai Ekspektasi

Sifat-sifat Nilai Ekspektasi:

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka $E(c) = c$
2. Jika c adalah sebuah konstanta dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka:
 $E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)]$
3. Jika c_1 dan c_2 adalah dua buah konstanta dan $u_1(X)$ dan $u_2(X)$ adalah dua buah fungsi dari X , maka:

$$E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] = c_1 \cdot E[u_1(X)] + c_2 \cdot E[u_2(X)]$$

Contoh 2:

Lihat kembali soal pada contoh 1

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$ dengan menggunakan sifat-sifat nilai ekspektasi

B. Rataan

Definisi:

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitas dari X di x adalah $f(x)$, maka rataan dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

Contoh:

Misalkan fungsi densitas dari X berbentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= 20x^3 (1 - x); 0 < x < 1 \\ &= 0 && ; x \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Hitung $E(X)$!

C. Varians

Definisi :Varians Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x , maka Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

Contoh:

Misalnya fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} ; x > 0 \\ &= 0 ; x \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Hitung $Var(X)$!

D. Momen

Definisi 1 : Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x , maka momen ke- k (dinotasikan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) \cdot dx$$

Definisi 2: Momen Sekitar Rataan Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x , maka momen sekitar rataaan ke- k (dinotasikan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^k \cdot f(x) \cdot dx$$

D. Momen

Contoh:

Misalkan fungsi densitas dari X berbentuk:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x/3 ; 1 < x < 2 \\ &= 0 ; x \text{ lainnya} \end{aligned}$$

Hitung μ'_3

E. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi : Fungsi Pembangkit Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah fungsi densitas dari X di x , maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x) dx$$