

STATISTIKA MATEMATIKA

Pertemuan 9

**Ekspektasi Dua Peubah Acak: Nilai
Ekspektasi Gabungan, Ekspektasi
Bersyarat, Rataan Bersyarat**

A. Nilai Ekspektasi Gabungan

Diskrit

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p(x,y)$ adalah nilai fungsi peluang gabungan dari (X, Y) di (x,y) , dan $v(X,Y)$ adalah fungsi dari peubah acak X dan Y ; maka nilai ekspektasi gabungan dari $v(X,Y)$, dinotasikan dengan $E[v(x,Y)]$, dirumuskan sebagai:

$$E[v(X,Y)] = \sum_x \sum_y v(x,y) \cdot p(x,y)$$

Contoh 1:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari peubah acak X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (1/72) (x + 2y) \quad ; \quad \begin{matrix} x = 0, 1, 2, 3 \\ y = 0, 1, 2, 3 \end{matrix}$$

Hitung $E(2XY^2 - 1)$

Kontinu

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $f(x,y)$ adalah nilai fungsi densitas gabungan dari (X, Y) di (x,y) , dan $v(X,Y)$ adalah fungsi dari peubah acak X dan Y ; maka nilai ekspektasi gabungan dari $v(X,Y)$, dinotasikan dengan $E[v(x,Y)]$, dirumuskan sebagai:

$$E[v(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,y) \cdot f(x,y) \, dx \, dy$$

Contoh :

Misalkan fungsi densitas gabungan dari peubah acak X dan Y berbentuk:

$$f(x,y) = x + y \quad ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

Hitung $E(2XY^2 - 1)$

B. Ekspektasi Bersyarat

Diskrit

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p'(x|y)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x , dan $p''(y|x)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y , maka nilai ekspektasi bersyarat dari $u(X)$ diberikan $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E[u(X)|y] = \sum_x u(x) \cdot p'(x|y)$$

Dan ekspektasi bersyarat dari $v(Y)$ diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E[v(Y)|x] = \sum_y v(y) \cdot p''(y|x)$$

Contoh:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari peubah acak X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (xy/18) \quad ; \quad x = 1, 2, 3 \\ y = 1, 2$$

Hitung $E(3X|y=1)$ dan $E(2Y^2|x=1)$

B. Ekspektasi Bersyarat

Kontinu

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $g(x|y)$ adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x , dan $h(y|x)$ adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y , maka nilai ekspektasi bersyarat dari $u(X)$ diberikan $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E[u(X)|y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot g(x|y) dx$$

Dan ekspektasi bersyarat dari $v(Y)$ diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E[v(Y)|x] = \int_{-\infty}^{\infty} v(y) \cdot h(y|x) dy$$

Contoh:

Misalkan fungsi densitas gabungan dari peubah acak X dan Y berbentuk:

$$f(x,y) = (3/4) xy^2 \quad ; \quad 0 < x < 2 \text{ dan } 1 < y < 2$$

Hitung $E(3X|y=1)$ dan $E(2Y^2|x=1)$

C. Rataan Bersyarat

Diskrit

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p'(x|y)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x , dan $p''(y|x)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y , maka nilai rataan bersyarat dari X diberikan $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X|y) = \sum_x x \cdot p'(x|y)$$

Dan rataan bersyarat dari Y diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E(Y|x) = \sum_y y \cdot p''(y|x)$$

Contoh:

Misalkan fungsi peluang gabungan dari X dan Y berbentuk:

$$p(x,y) = (1/72) (x+2y); x = 0, 1, 2, 3 \text{ dan } y = 0, 1, 2, 3$$

Hitung $E(X|y=1)$ dan $E(Y|x=2)$

C. Rataan Bersyarat

Kontinu

Definisi:

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, $g(x|y)$ adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan $Y=y$ di x , dan $h(y|x)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan $X=x$ di y , maka nilai rataan bersyarat dari X diberikan $Y=y$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(x|y) dx$$

dan rataan bersyarat dari Y diberikan $X=x$ dirumuskan sebagai berikut:

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y|x) dy$$