STRUKTUR ALJABAR

SEMIGRUP

Sistem aljabar $(S, *)$ merupakan semigrup, jika

1. Himpunan S tertutup terhadap operasi $*$.
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif.

Contoh 1

$(Z, +)$ merupakan sebuah semigrup.

Contoh 2

Misalkan himpunan bilangan asli N, didefinisikan operasi biner:

$$a * b = a + b + ab$$

Tunjukan bahwa $(N, *)$ adalah suatu semigrup.

Penyelesaian:

1. *Tertutup*

   Ambil sebarang $a, b \in N$, karena $a, b \in N$, dan $ab \in \mathrm{N}$ maka

   $$a * b = a + b + ab \in \mathrm{N}.$$

   Jadi, N tertutup terhadap operasi biner $*$.

2. *Assosiatif*

   Ambil sebarang $a, b, c \in N$, maka

   $$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)\, c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a * (b * c) &= a * (b + c + bc) \\
&= a + (b + c + bc) + a\,(b + c + bc) \\
&= a + b + c + bc + ab + ac + abc
\end{aligned}
$$

Maka untuk setiap $a, b, c \in N$ berlaku

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Jadi, $(N, *)$ merupakan suatu semigrup.

Jika operasi biner pada semigrup $(S, *)$ tersebut bersifat komutatif, maka semigrup $(S, *)$ disebut juga semigrup abel.

Contoh 3

$(Z,+)$ merupakan sebuah semigrup abel.

Apakah $(\mathrm{N}, *)$ pada contoh 2 merupakan semigrup abel?

MONOID

Sistem aljabar $(S, *)$ merupakan monoid, jika

1. Himpunan S tertutup terhadap operasi $*$.
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif.
3. Pada S terdapat elemen identitas untuk operasi $*$.

Contoh 4

$(Z, +)$ merupakan sebuah monoid.

Jika operasi biner pada monoid $(S,*)$ tersebut bersifat komutatif, maka monoid $(S,*)$ disebut juga monoid abel.

Contoh 5

Sistem aljabar $(Z,+)$ merupakan sebuah monoid abel.

GRUP

Sistem aljabar $(S, *)$ merupakan monoid, jika

1. Himpunan S tertutup terhadap operasi $*$.
2. Operasi $*$ bersifat asosiatif.
3. Pada S terdapat elemen identitas untuk operasi $*$.
4. Setiap anggota S memiliki invers untuk operasi $*$ dan invers tersebut merupakan anggota S juga.

Contoh 6

$(Z, +)$ merupakan sebuah grup.

Jika operasi biner pada grup $(S,*)$ tersebut bersifat komutatif, maka grup $(S, *)$ disebut juga grup abel.

Contoh 7

Sistem aljabar $(Z, +)$ merupakan sebuah grup abel.

Contoh 8

Misalkan G = {-1, 1}. Tunjukan bahwa G adalah suatu grup abel terhadap perkalian biasa (G, ×).

Penyelesaian:

Daftar Cayley G = {-1, 1} terhadap (G, ×) sebagai berikut:

×	**-1**	**1**
-1	1	-1
1	-1	1

a. *Tertutup*

   G tertutup terhadap operasi perkalian biasa × karena

   $-1 \times -1 = 1 \in G$

   $-1 \times 1 = -1 \in G$

   $1 \times -1 = -1 \in G$

   $1 \times 1 = 1 \in G$

b. *Assosiatif*

   Ambil sebarang nilai dari G, misalkan $a = -1$, $b = -1$ dan $c = 1 \in G$, maka

   $$(a \times \mathrm{b}) \times c = (-1 \times -1) \times 1 = 1 \times 1 = 1$$
   $$a \times (b \times c) = 1 \times (-1\times -1) = 1 \times 1 = 1$$

   sehingga $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = 1$ maka G assosiatif.

c. Adanya elemen identitas ($e = 1$) terhadap perkalian.

   Ambil sebarang nilai dari G,

   - misalkan $-1 \in G$ sehingga $-1 \times e = e \times (-1) = -1$
   - misalkan $1 \in G$ sehingga $1 \times e = e \times 1 = 1$

   maka G mempunyai identitas.

d. Adanya invers.

   - Ambil sebarang nilai dari G, misalkan $-1 \in G$,
     pilih $-1 \in G$, sehingga :

$$-1 \times (-1) = 1 = e, \quad \text{maka} \quad (-1)^{-1} = -1$$

- Ambil sebarang nilai dari G, misalkan $1 \in G$, pilih $1 \in G$, sehingga :

$$1 \times 1 = 1 \times 1 = e, \text{maka } (1)^{-1} = 1$$

maka ada invers untuk setiap anggota G.

e. *Komutatif*

Operasi × bersifat komutatif, karena

$-1 \times 1 = -1$ dan $1 \times (-1) = -1$ sehingga $-1 \times 1 = 1 \times (-1) = -1$

Jadi, (G, ×) **merupakan** grup komutatif atau grup abel.

Contoh 9

Misalkan G = {-1, 1} adalah suatu himpunan. Apakah G merupakan suatu grup terhadap penjumlahan (G, +).

Penyelesaian:

Daftar Cayley G = {-1, 1} terhadap (G, +) sebagai berikut

+	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

Berdasarkan daftar Cayley dari tabel di atas, operasi penjumlahan himpunan G = {-1, 1} menghasilkan {-2, 0, 2}. Dikarenakan {-2, 0, 2} adalah bukan merupakan anggota dari himpunan G = {-1, 1}, maka G = {-1, 1} tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Jadi, (G, +) bukan suatu grup.

TUGAS

1. Misalkan himpunan bilangan asli N, didefinisikan operasi biner:

$$x * y = x + y - xy.$$

   a. Apakah (N,*) adalah suatu semigrup?
   b. Apakah (N,*) adalah suatu monoid?

2. Misalkan G = {0, 1, 2, 3, 4, 5} adalah merupakan himpunan dari Z_6. Tunjukan bahwa G adalah suatu grup abel terhadap penjumlahan (G, +).

SUBGRUP

Misalkan $(G,*)$ sebuah grup dan $H \subseteq G$. Jika $(H,*)$ membentuk grup, maka $(H,*)$ merupakan subgrup dari grup $(G,*)$.

Contoh 1

$(Z,+)$ merupakan sebuah grup.

Misalkan $A_2 = \{x \mid x = 3n, n \in Z\}$. Jelas bahwa $A_2 \subseteq Z$. Karena $(A_2,+)$ membentuk grup, maka $(A_2,+)$ merupakan subgrup dari grup $(Z,+)$.

Contoh 2

Diketahui $Z_4 = \{0,1,2,3\}$ dan operasi biner $\oplus$ didefinisikan sebagai

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b & \text{jika } a+b < 4 \\ a+b-4 & \text{jika } a+b \geq 4 \end{cases}.$$

$(Z_4, \oplus)$ adalah sebuah grup.

Misalkan $B = \{0,2\}$. Jelas bahwa $B \subseteq Z_4$. $(B, \oplus)$ merupakan subgrup dari grup $(Z_4, \oplus)$.

Sedangkan $C = \{0,1,2\}$. Jelas bahwa $C \subseteq Z_4$. $(C, \oplus)$ bukan merupakan subgrup dari grup $(Z_4, \oplus)$.

SUBGRUP NORMAL

Misalkan $(G,*)$ sebuah grup dan $(H,*)$ merupakan subgrup dari grup $(G,*)$.

Koset kiri dari H adalah himpunan

$$a*H = \{ a * h \mid \forall h \in H \}$$

dan koset kanan dari H adalah

$$H*a = \{ h * a \mid \forall h \in H \},$$

untuk setiap $a \in G$.

Contoh 1

$(Z_4 , \oplus)$ adalah grup dan $B = \{0 , 2\}$ adalah subgrup dari $(Z_4 , \oplus)$.

Koset kiri dari B adalah $a \oplus B$ untuk setiap $a \in Z_4$:

$0 \oplus B = \{0 , 2\}$, $1 \oplus B = \{1 , 3\}$, $2 \oplus B = \{0 , 2\}$, dan $3 \oplus B = \{1 , 3\}$. Jadi, koset kiri dari B adalah $\{0,2\}$ dan $\{1,3\}$.

Koset kanan dari B adalah $B \oplus a$ untuk setiap $a \in Z_4$:

$B \oplus 0 = \{0 , 2\}$, $B \oplus 1 = \{1 , 3\}$, $B \oplus 2 = \{0 , 2\}$, dan $B \oplus 3 = \{1 , 3\}$. Jadi, koset kanan dari B adalah $\{0,2\}$ dan $\{1,3\}$.

Suatu subgrup $(H,*)$ dari grup $(G,*)$ merupakan subgrup normal jika untuk setiap $a \in G$ berlaku $a*H = H*a$ (koset kiri H = koset kanan H, untuk setiap anggota G).

Contoh 2

$B = \{0 , 2\}$ yang merupakan subgrup dari $(Z_4, \oplus)$ adalah subgrup normal dari $(Z_4, \oplus)$, karena untuk setiap $a \in Z_4$, $a \oplus B = B \oplus a$.

GRUP KUOSIEN

Himpunan koset dari subgrup normal H pada grup $(G, *)$ membentuk grup kuosien di bawah operasi perkalian koset.

Contoh 3

Koset dari B = {0 , 2} yang merupakan subgrup dari $(Z_4, \oplus)$ adalah {0 , 2} dan {1 , 3}. Himpunan {{0 , 2}, {1 , 3}} membentuk grup kuosien di bawah operasi perkalian koset.

$\otimes$	{0 , 2}	{1 , 3}
{0 , 2}	{0 , 2}	{1 , 3}
{1 , 3}	{1 , 3}	{0 , 2}