Materi Program Linier

1. <u>Program Linier menggunakan **Metode Big-M**</u>

   Metode Big-M merupakan metode simpleks dengan tambahan variabel bantuan (R) yang mempunyai koefisien pada fungsi tujuan (M). Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan program linier dengan pembatasan atau kendala yang mempunyai tanda pertidaksamaan yang berbeda-beda bahkan berupa persamaan. Berikut aturan dalam menggunakan **Metode big-M**:

   a. **Koefisien variabel buatan (R) pada fungsi tujuan (Z) untuk persoalan maksimum bertanda negatif (-M) sedangkan persoalan minimum bertanda positif (M)**

   b. **Untuk merubah koefisien fungsi tujuan (Z) pada persoalan maksimun, yakni $\boldsymbol{Z_j = C_R y_j + C_j}$; sedangkan untuk merubah koefisien fungsi tujuan (Z) pada persoalan minimum, yakni $\boldsymbol{Z_j = C_R y_j - C_j}$**

      Ket: $\boldsymbol{Z_j = fungsi\ tujuan\ kolom\ ke - j; j = 1, 2, \dots, n}$

      $\boldsymbol{C_R = koefisien\ variabel\ bantuan\ (R) disesuaikan\ persoalan}$

      $\boldsymbol{y_j = elemen\ yang\ satu\ kolom\ ke - j\ dengan\ fungsi\ tujuan}$

      $\boldsymbol{C_j = koefisien\ fungsi\ tujuan\ kolom\ ke - j}$

   c. **Tentukan basis masuk, basis keluar dan elemen vipot sama seperti metode simpleks**

   d. **Operasikan setelah point a-c dilakukan dengan OBE (Operasi Baris Elementer)**

   Berikut contoh soal dan penyelesaiannya:

   Tentukan solusi optimum dari pemrograman linier dengan cari x_1 dan x_2

   s.r.s: $Z = 2x_1 + 3x_2$ (minimum)

   d.p: $2x_1 + x_2 \le 16$

   $x_1 + 3x_2 \ge 20$

   $x_1 + x_2 = 10$

   $x_1, x_2 \ge 0$

   Langkah 1: Transformasikan persoalan menjadi bentuk standar.

   Cari $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R_1, R_2, R_3$.

   S.r.s: $Z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3$

   $2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3 - Z = 0$

   D.p: $2x_1 + x_2 + s_1 + R_1 = 16$

   $x_1 + 3x_2 - s_2 + R_2 = 20$

   $x_1 + x_2 + 0s_3 + R_3 = 10$

   $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R_1, R_2, R_3 \ge 0$

   Langkah 2: Bentuk standar dirubah ke bentuk matriks.

$$
\begin{array}{c}
 \\ s_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ Z
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
2 & 3 & 0 & 0 & 0 & M & M & M & -1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Langkah 3: Rubah koefisien fungsi tujuan yang ada dibaris ke- 4 pada langkah 2

Karena persoalan minimum maka rumus yang digunakan yakni $\boldsymbol{Z_j = C_R y_j - C_j}$

$$Z_1 = C_R y_1 - C_1 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - (2) = 4M - 2$$

$$Z_2 = C_R y_2 - C_2 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - (3) = 5M - 3$$

$$Z_3 = C_R y_3 - C_3 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (0) = M$$

$$Z_4 = C_R y_4 - C_4 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - (0) = -M$$

$$Z_5 = C_R y_5 - C_5 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - (0) = 0$$

$$Z_6 = C_R y_6 - C_6 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - (M) = 0$$

$$Z_7 = C_R y_7 - C_7 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - (M) = 0$$

$$Z_8 = C_R y_8 - C_8 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (M) = 0$$

$$Z_9 = C_R y_9 - C_9 = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - (-1) = 1$$

$$Z_{10} = C_R y_{10} - C_{10} = (M \quad M \quad M)\begin{pmatrix}20\\16\\10\end{pmatrix} - (0) = 46M$$

Langkah 4: Rubah koefisien fungsi tujuan yang dibaris ke-4 pada matriks pada langkah 2

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ Z \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
4M-2 & 5M-3 & M & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 46M
\end{array}\right]
\end{array}$$

Langkah 5: Tentukan basis masuk, basis keluar, elemen vipot dan operasikan menggunakan OBE sampai setiap elemen fungsi tujuan bernilai negatif

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ Z \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 20 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
4M-2 & 5M-3 & M & -M & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 46M
\end{array}\right]
\end{array} \rightarrow \boxed{\text{BK}}$$

$$\downarrow \boxed{\text{BM}}$$

$$\frac{h1}{a12} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\frac{h2}{a22} = \frac{20}{3} = 6{,}667 \text{ (MIN)}$$

$$\frac{h3}{a32} = \frac{10}{1} = 10$$

Elemen vipot terletak pada $a_{22} = 3$

Menggunakan OBE : $b_2\left(\frac{1}{3}\right)$; $b_{12}(-1)$; $b_{32}(-1)$; $b_{42}\big(-(5M-3)\big)$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \\
\hline
s_1 & 5/3 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 28/3 \\
x_2 & 1/3 & 1 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 20/3 \\
R_3 & 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & -1/3 & 1 & 0 & 10/3 \\
Z & \frac{7}{3}M-1 & 0 & M & \frac{2}{3}M-1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3}M+1 & 0 & 1 & \frac{38}{3M}+20
\end{array}
\rightarrow \text{BK}
$$

BM

$\frac{h1}{a11} = \frac{28/3}{5/3} = \frac{28}{5} = 5{,}6$

$\frac{h2}{a21} = \frac{20/3}{1/3} = 20$

$\frac{h3}{a31} = \frac{10/3}{2/3} = 5$ (MIN)

Elemen vipot terletak pada $a_{31} = 2/3$

Menggunakan OBE: $b_3\left(\frac{3}{2}\right);\ b_{13}\left(-\frac{5}{3}\right);\ b_{23}\left(-\frac{1}{3}\right);\ b_{43}\left(-\left(\frac{7}{3}M-1\right)\right)$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \\
\hline
s_1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 5 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 5 \\
Z & 0 & 0 & M & -\frac{1}{2}M-\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}M-\frac{1}{2} & -\frac{21}{6}M+\frac{3}{2} & 1 & M+25
\end{array}
\rightarrow \text{BK}
$$

BM

$\frac{h1}{a13} = \frac{1}{1} = 1$ (MIN)

$\frac{h2}{a23} = \frac{5}{0} = \infty$

$\frac{h3}{a33} = \frac{5}{0} = \infty$

Elemen vipot terletak pada $a_{13} = 1$

Menggunakan OBE : $b_{41}(-M)$

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z & H \\
\hline
s_1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1 & 1/2 & -5/2 & 0 & 1 \\
x_2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 5 \\
x_1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & 5 \\
Z & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -M & -M-\frac{1}{2} & -M+\frac{3}{2} & 1 & 25
\end{array}
$$

Langkah 6: simpulkan langkah 5 dari bentuk matrik yang terakhir.

Jadi, solusi optimum dari persoalan pemrograman linier diperoleh $Z = 25$ dengan $x_1 = 5, x_2 = 5, s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 0, R_1 = 0, R_2 = 0, dan\ R_3 = 0$.

Catatan: jika pembatasan berupa persamaan variabel s (slack/surplus) boleh ditulis atau tidak ditulis, karena tidak berpengaruh pada proses perhitungannya.

2. Program Linier menggunakan **Metode Dua Fase**

Metode Dua Fase merupakan metode yang mempunyai fungsi yang sama dengan metode big-M, yakni menentukan solusi optimum dari persoalan yang memiliki pertidaksamaan berbeda-beda bahkan persamaan pada pembatasannya. Berikut aturan dari metode Dua Fase:

a. **Metode Dua Fase digunakan pada variabel basis awal terdiri dari variabel buatan (A).**
b. **Proses optimasi dilakukan dua tahap, yakni**
   - **Tahap pertama, merupakan proses optimasi variabel buatan**
   - **Tahap kedua, merupakan proses optimasi variabel keputusan**
c. **Variabel buatan sebenarnya tidak ada (hanya ada di atas kertas) sehingga tahap pertama dilakukan untuk memaksa variabel buatan bernilai 0.**

Berikut contoh soal dan penyelesaiannya:

Tentukan solusi optimum dari pemrograman linier dengan cari x_1 dan x_2

s.r.s: $Z = 4x_1 + x_2$ (minimum)

d.p: $3x_1 + x_2 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 \ \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Langkah 1: mengubah fungsi tujuan (Z) menjadi variabel buatan (A) dan bentuk standar untuk pembatasannya.

s.r.s.: $Z = 4x_1 + x_2$ menjadi $A = A_1 + A_2$

d.p.: $3x_1 + x_2 + A_1 = 3$

$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + A_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

Langkah 2: Substitusikan $A_1 dan\ A_2$ pada variabel A.

$3x_1 + x_2 + A_1 = 3$ menjadi $A_1 = 3 - 3x_1 - x_2$

$4x_1 + 3x_2 - s_1 + A_2 = 6$ menjadi $A_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + s_1$

Sehingga $A = A_1 + A_2$

$$A = (3 - 3x_1 - x_2) + (6 - 4x_1 - 3x_2 + s_1)$$
$$A = 9 - 7x_1 - 4x_2 + s_1$$

Langkah 3: tentukan fase 1 dengan membentuk matriks jika menggunakan OBE atau tabel jika menggunakan simpleks.

Fase 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & A_1 & A_2 & A & H \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ s_2 \\ A \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow \text{BK}$$

BM

$$\frac{h1}{a11} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{(MIN)}$$
$$\frac{h2}{a21} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$
$$\frac{h3}{a31} = \frac{4}{1} = 4$$

Elemen vipot terletak di $a_{11} = 3$

Menggunakan OBE: $b_1\left(\frac{1}{3}\right);\ b_{21}(-4);\ b_{31}(-1);\ b_{41}(-7)$

Fase 1 Iterasi 1

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & A_1 & A_2 & A & H \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ A_2 \\ s_2 \\ A \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5/3 & -1 & 0 & -4/3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5/3 & -1 & 0 & -7/3 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow \text{BK}$$

BM

$$\frac{h1}{a12} = \frac{1}{1/3} = 3$$
$$\frac{h2}{a22} = \frac{2}{5/3} = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ (MIN)}$$
$$\frac{h3}{a32} = \frac{3}{5/3} = \frac{9}{5} = 1{,}8$$

Elemen vipot terletak di $a_{22} = 5/3$

Menggunakan OBE:$b_2\left(\frac{3}{5}\right);\ b_{12}\left(-\frac{1}{3}\right);\ b_{32}\left(-\frac{5}{3}\right);\ b_{42}\left(-\frac{5}{3}\right)$

Fase 1 Iterasi 2

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ s_2 \\ A \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & A_1 & A_2 & A & H \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 0 & 3/5 & -1/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 & -4/5 & 3/5 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Karena variabel bantuan (A) sudah bernilai 0 maka lanjut ke langkah selanjutnya.

Langkah 4: tentukan fase 2 dengan mensubtitusi $x_1 \; dan \; x_2$ ke Z.

Dari matriks terakhir di langkah 3 diperoleh : $x_1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}s_1$

$$x_2 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}s_1$$

Sehingga $Z = 4x_1 + x_2$

$$Z = 4\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}s_1\right) + \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}s_1\right)$$

$$Z = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}s_1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}s_1$$

$$Z = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}s_1$$

Fase 2

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ s_2 \\ Z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & Z & H \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1 & 18/5 \end{array}\right] \end{array}$$

Langkah 5: simpulkan langkah 4 dari bentuk fase 2

Jadi, solusi optimum dari persoalan pemrograman linier yakni $Z = 18/5$ dengan $x_1 = \frac{3}{5} \; dan \; x_2 = \frac{6}{5}$.

3. Program Linear dengan **Dual Problem (Dualitas)**

Dual Problem merupakan persoalan rangkap yang berasal dari satu soal terdiri dari primal problem dan dual problem. Dalam menentukan dual problem berlaku kebalikannya dari soal primal problem yang diberikan. Berikut bentuk umum dari primal problem dan dual problem:

a. Primal Problem (persoalan utama)

Cari : $x_1, x_2, \dots, x_n$

S.r.s.: $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

(Maksimum)

D.p.:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq h_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq h_2$$
...
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq h_m$$
$$x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0 \; ; j = 1, 2, \dots, n$$

b. Dual Problem (persoalan rangkap)

Cari : $y_1, y_2, \dots, y_m$

S.r.s.:$W = h_1y_1 + h_2y_2 + \cdots + h_my_m$

(Minimum)

D.p.:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2$$
...
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n$$
$$y_1, y_2, \dots, y_j \geq 0 \; ; j = 1, 2, \dots, m$$