RUANG VEKTOR

A. DEFINISI RUANG VEKTOR

Definisi 4.1 : Misalkan V sebarang himpunan benda yang dua operasinya kita definisikan penambahan dan perkalian skalar (bilangan real), V disebut ruang vektor dan benda-benda pada V kita namakan vektor jika dan hanya jika memenuhi aksioma 4.1 berikut:

1. Jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\boldsymbol{S}$
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
4. $\exists\, \mathbf{0} \in V$ sehingga $\mathbf{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{u} \in V$
5. $\forall \boldsymbol{u} \in V, \exists\, -\boldsymbol{u} \in V$, sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$
6. Jika $k \in R$ dan $\boldsymbol{u} \in V$ maka $k\boldsymbol{u} \in V$
7. $k\,(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
8. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$
9. $k\,(l\boldsymbol{u}) = (kl)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Contoh 4.1 :

1. Himpunan vektor Euclides dengan operasi standar (operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar).

   Notasi : R^n (Ruang Euclides orde n)
   - R : Bilangan real
   - R^2: Vektor di bidang
   - R^3 : Vektor di ruang tiga dimensi
2. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan operasi standar (penjumlahan matriks dan perkalian matriks dengan skalar),
   Notasi : $M_{m\times n}$ (Ruang Matriks $m \times n$)
3. Himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar.
   Notasi : P_n (Ruang Polinom orde n)

Contoh 4.2 :

Selidiki apakah himpunan semua bilangan real positif x dengan operasi-operasi $x + x' = xx'$ dan $kx = x^k$ membentuk ruang vektor!

Penyelesaian:

1. Misalkan $u = x, x \in R^+$ dan $v = x', x' \in R^+$ maka $u + v = x + x' = xx' \in R$, maka syarat 1 dipenuhi :
2. $u + v = x + x'$

   $= xx'$

   $= x'x$ (sifat komutatif dalam bilangan real positif)

   $= x' + x$

   $= v + u$, maka syarat 2 dipenuhi
3. Misalkan $w = x''$, maka :

   $(u + v) + w = (x + x') + x''$

   $= (xx') + x''$ (definisi)

   $= xx'$ x'' (definisi)

   $= x(x'x'')$ (sifat asosiatif pada perkalian bilangan real)

   $= x + (x'x'')$

   $= x + (x' + x'')$, maka syarat 3 dipenuhi
4. Misalkan ada $\boldsymbol{o} \in R^+$, sedemikian hingga:

   $x + \boldsymbol{o} = x$

   $\Leftrightarrow x\boldsymbol{o} = x$ (definisi)

   $\Leftrightarrow \mathbf{o} = \dfrac{x}{x} = 1 \in R^+$, syarat 4 dipenuhi
5. Misalkan ada $(-u)$ sedemikian hingga

   $u + (-u) = \boldsymbol{o}$

   $\Leftrightarrow x + (-u) = 1$

   $\Leftrightarrow (-u) = \dfrac{1}{x}, x > 0$, maka $\dfrac{1}{x} \in$ R$^+$, jadi syarat 5 dipenuhi
6. Misalkan $u = x, x \in R^+$ dan $k \in R$, maka

   $ku = kx$

   $= x^k \in R^+$ (bilangan real positif jika dipangkatkan, hasilnya akan positif juga), jadi syarat 6 dipenuhi
7. $k(u + v) = k(x + x')$

   $= (x + x')^k$ (definisi)

   $= (xx')^k$ (definisi)

   $= x^k (x')^k$ (sifat pangkat)

   $= kx + kx'$ (definisi)

   $= ku + kv$, syarat 7 dipenuhi
8. $(k + l)u = (k + l)x$

$= x^{(k+l)}$ (definisi)

$= x^k x^l$ (sifat pangkat)

$= x^k + x^l$ (definisi)

$= kx + lx$ (definisi)

$= ku + lu$, sifat 8 dipenuhi

9. $k(lu) = k(lx)$

$= k(x^l)$ (definisi)

$= (x^l)^k$ (definisi)

$= x^{kl}$ (sifat pangkat)

$= (kl)x$

$= (kl)u$, syarat 9 dipenuhi

10. $1u = 1x$

$= x^1$ (definisi)

$= x$, syarat 10 dipenuhi

Karena ke-10 aksioma dipenuhi maka himpunan semua bilangan real positif x dengan operasi-operasi $x + x' = xx'$ dan $kx = x^k$ membentuk ruang vektor.

B. RUANG EUCLID ORDE-N

Definisi 4.2 : Jika n adalah sebuah bilangan positif, maka tupel-n-terorde (*ordered-n-tuple*) adalah sebuah urutan n bilangan real $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Himpunan semua tupel-n-terorde dinamakan ruang-n dan dinyatakan dengan R^n.

Andaikan terdapat ruang berdimensi 3 dapat disimbolkan sebagai (a_1, a_2, a_3) dapat diinterpretasikan secara geometris sebagai suatu titik atau suatu vektor.

1. **Vektor Nol**

   Definisi Vektor nol : Vektor nol adalah Vektor yang berbentuk $\mathbf{0} = (0,0,0)$

2. **Negatif suatu vektor**

   Definisi 4.3 : Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ adalah sebuah vektor pada R^n, maka negatif $\boldsymbol{u}$ dinyatakan oleh $-\boldsymbol{u}$ dan didefinisilkan sebagai berikut :

   $-\boldsymbol{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$

   Contoh 4.3:

   Jika $\boldsymbol{U} = (1,5,-6)$ maka $-\boldsymbol{U} = (-1,-5,6)$

3. **Operasi Standar pada $\boldsymbol{R^n}$**

   a. **Penjumlahan dua Vektor**

Definisi 4.4 : Dua vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pada R^n maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

Contoh 4.4 :

Jika $\boldsymbol{u} = (2,5,-8)$ dan $\boldsymbol{v} = (1,9,-10)$, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (2,5,-8) + (1,9,-10) = (3,14,-18)$

b. Selisih dua Vektor

Definisi 4.5 : Dua vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pada R^n maka $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$

c. Perkalian skalar dengan vektor

Definisi 4.6 : Jika k adalah sebarang skalar dan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, maka perkalian skalar $k\boldsymbol{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$

Contoh 4.5:

Jika $k = 3$ dan $\boldsymbol{u} = (1,-9,8)$, maka $k\boldsymbol{u} = 3(1,-9,8) = (3,-27,24)$

d. Kesamaan Dua Vektor

Definisi 4.7 : Dua vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pada R^n dikatakan sama jika $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \cdots u_n = v_n$

4. Hasil Kali Dalam Euclidis (*Euclidean Inner Product*) Dua Vektor

Definisi 4.8: Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah sebarang vektor pada R^n, maka hasil kali dalam Euclidis $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ kita definisikan dengan :

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots . + u_nv_n$

$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots . + u_nv_n$

Contoh 4.6:

$\boldsymbol{u} = (2,3,7)$ dan $\boldsymbol{v} = (-9,8,7)$, maka
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} &= 2(-9) + 3(8) + 7(7)\\ &= -18 + 24 + 49\\ &= 55\end{aligned}$$

5. Panjang (Norma) dan Jarak Euclides sebuah Vektor

Definisi 4.9 : Jika $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ pada R^n, maka norma (panjang) $\boldsymbol{u}$ adalah $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$

Contoh 4.7:

Jika $\boldsymbol{u} = (1,2,2)$ maka $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Jarak euclides antara titik-titik $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ pada R^n didefinisikan sebagai:

$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

Contoh 4.8 :

Jika $\boldsymbol{u} = (1,3,-2,7)$ dan $\boldsymbol{v} = (0,7,2,2)$ maka :

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2}$$

$$= \sqrt{1+16+16+25}$$

$$= \sqrt{58}$$

Ketaksamaan Cauchy-Schwarz dalam $\boldsymbol{R^n}$

Teorema 4.4 : Jika $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_n)$ adalah vektor-vektor dalam R^n, maka:

$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \le \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$

atau

$$|u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n| \le \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2}$$

C. SUB RUANG

Definisi 4.10 : Diketahui V ruang vektor, $W \subseteq V$, W disebut sub ruang dari V jika hanya jika W itu sendiri merupakan ruang vektor di bawah penambahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Aksioma 4.2 :

V ruang vektor, $W \subseteq V$, W disebut sub ruang dari V jika hanya jika

(1) Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor pada W, maka $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$

(2) Jika $k \in R$ dan $\boldsymbol{u} \in W$, maka $k\boldsymbol{u} \in W$

Contoh 4.9 :

Selidiki apakah himpunan W dari semua matriks 2×2 yang mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya adalah sub ruang dari M_{22}!

Penyelesaian :

(1) Misalkan $u = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in W$ dan $v = \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} \in W$

Maka $u + v = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{bmatrix} \in W$ (karena matriks yang dihasilkan mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya), jadi syarat 1 dipenuhi

(2) $ku = k\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ka \\ kb & 0 \end{bmatrix} \in W$, (karena matriks yang dihasilkan mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya), jadi syarat 2 dipenuhi

Karena syarat (1) dan (2) dipenuhi maka himpunan W dari semua matriks 2×2 yang mempunyai bilangan nol pada diagonal utamanya adalah sub ruang dari M_{22}!

D. KOMBINASI LINEAR

Definisi 4.11 : Sebuah vektor $\boldsymbol{w}$ dinamakan **kombinasi linear** dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ jika vektor tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\,\boldsymbol{v_2} + \dots. + k_r\boldsymbol{v_r}$ dengan $k_1, k_{2,} \cdots k_r$ adalah skalar.

Contoh 4.10 :

Misal $\boldsymbol{u} = (2, 4, 0)$ dan $\boldsymbol{v}$ = (1, -1, 3) adalah vektor-vektor di R^3. Apakah vektor berikut merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor di atas :

a. $\boldsymbol{a} = (4,2,6)$

b. $\boldsymbol{b} = (1,5,6)$

c. $\boldsymbol{c} = (0,0,0)$

Penyelesaian:

a. Tulis $k_1\boldsymbol{u} + k_2\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$

Akan diperiksa apakah terdapat nilai k_1 dan k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi :

$$k_1\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

dapat dibentuk menjadi :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\4 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$$

dengan operasi baris elementer (OBE):

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\4 & -1 & 2\\0 & 3 & 6\end{pmatrix} B_{1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\4 & -1 & 2\\0 & 3 & 6\end{pmatrix} B_{21(-4)} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\0 & -3 & -6\\0 & 3 & 6\end{pmatrix} B_{32(1)} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\0 & -3 & -6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} B_{2(-\frac{1}{3})}$$

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 2\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} B_{12(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matriks eselon tereduksi yang diperoleh:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ Sehingga diperoleh persamaan baru yaitu : $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$.

Dengan demikian terdapat nilai $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$. Sehingga $\boldsymbol{a}$ merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ atau bisa ditulis sebagai $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$

b. Tulis $k_1\boldsymbol{u} + k_2\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$

Akan diperiksa apakah terdapat nilai k_1 dan k_2 sehingga kesamaan tersebut dipenuhi :

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dapat dibentuk menjadi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dengan operasi baris elementer (OBE):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} B_{1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} B_{21(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B_{2(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} B_{32(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Perhatikan baris ketiga dari Operasi Baris Elementer di atas

$$0k_1 + 0k_2 = 9$$

SPL ini tidak konsisten (tidak mempunyai solusi) karena seharusnya $0k_1 + 0k_2 = 0$. Jadi, tidak ada nilai k_1 dan k_2 yang memenuhi, sehingga $\boldsymbol{b}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

c. Dengan memilih $k_1 = 0$ dan $k_2 = 0$, maka dapat ditulis k_1**u** + k_2**v = c.**

Artinya vektor nol merupakan kombinasi linear dari vektor apapun.

E. MERENTANG / MEMBANGUN

Jika $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V, maka secara umum beberapa vektor dalam V dapat dibentuk menjadi kombinasi linear dari $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ dan yang lainnya bisa tidak dapat dibentuk sebagai kombinasi linear.

Definisi 4.12 : Jika $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ maka kita mengatakan bahwa vektor-vektor ini merentang V.

Contoh 4.11 :

Tentukan apakah $\boldsymbol{v_1} = (1,1,2), \boldsymbol{v_2} = (1,0,1), \boldsymbol{v_3} = (2,1,3)$ merentangkan ruang vektor R^3 ?

Penyelesaian:

Harus ditentukan apakah suatu vektor sembarang $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dalam R^3 dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear $\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3}$ dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$.

Maka didapat :

$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,1,3)$

atau

$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3\ , k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$

Sehingga diperoleh persamaan:

$k_1 + k_2 + 2k_3\ = b_1 \cdots (1)$

$k_1 + k_3 = b_2 \cdots (2)$

$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3 \cdots (3)$

Persamaan diselesaikan menggunakan OBE,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{pmatrix} B_{21(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1+b_2 \\ 2 & 1 & 3 & b_3 \end{pmatrix} B_{31(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1+b_2 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1+b_3 \end{pmatrix}$$

$$B_{32(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -b_1+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1-b_2+b_3 \end{pmatrix}$$

Terdapat baris 0 pada matriks setelah direduksi, sehingga ada vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ di $\boldsymbol{R}^3$ yang bukan merupakan kombinasi linear dari $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$. Jadi $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ tidak membangun $\boldsymbol{R}^3$.

F. KEBEBASAN LINEAR

Definisi 4.13 : Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}\}$ adalah himpunan vektor, maka persamaan vektor $k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \ldots. + k_r\,\boldsymbol{v_r} = \boldsymbol{0}$ mempunyai paling sedikit penyelesaian, yaitu $k_1 = 0$, $k_2 = 0, \cdots k_r = 0$.

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka S kita namakan himpunan **bebas linear** (*linearly independent*). Jika ada penyelesaian lain, maka S kita namakan himpunan **tak bebas linear** (*linearly dependent*) atau **bergantung linear.**

Contoh 4.13 :

Himpunan vektor-vektor $S = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, dengan :

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Selidiki vektor-vektor tersebut bebas linear atau bergantung linear!

Penyelesaian :

$k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v} + k_3\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ -2k_1 \\ 1k_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k_2 \\ 2k_2 \\ -1k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1k_3 \\ 1k_3 \\ -1k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan :

$$k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$$
$$-2k_1 + 2k_2 + k_3 = 0$$
$$k_1 - k_2 - k_3 = 0$$

Diselesaikan menggunakan OBE:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{B}_{21(2)}\ \mathrm{B}_{31(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{B}_{32(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathrm{B}_{3(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan baru :

$k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$

$6k_2 - k_3 = 0$

$k_3 = 0$

Sehingga diperoleh penyelesaian, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ dan $k_3 = 0$

Jadi, vektor-vektor tersebut bebas linear.

Contoh 4.14 :

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3 ?

Penyelesaian:

$k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ atau $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

dengan OBE diperoleh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa k_1, k_2, k_3 merupakan solusi tak hingga banyak.

Jadi, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

G. BASIS DAN DIMENSI

Definisi 4.14 : Jika V adalah sembarang ruang vektor dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor dalam V, maka S disebut suatu **basis** untuk V jika dua syarat ini dipenuhi:

a. S bebas secara linear

b. S merentangkan *V.*

Basis dari suatu ruang vektor tidak harus tunggal tetapi bisa lebih dari satu. Ada dua macam basis yang kita kenal yaitu basis standar dan basis tidak standar.

Contoh basis standar:

1. $S = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$, dengan $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n} \in R^n$

$$\boldsymbol{e_1} = (1, 0, \dots, 0), \boldsymbol{e_2} = (0, 1, \dots, 0), \dots, \boldsymbol{e_n} = (0, 0, \dots, 1)$$

   Merupakan basis standar dari R^n.

2. $S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ merupakan basis standar untuk P_n (polinom orde-n)

3. $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ merupakan basis standar untuk M_{22}.

Teorema 4.5 : Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah suatu basis untuk suatu ruang vektor V, maka setiap vektor $\boldsymbol{v}$ dalam V dapat dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \dots + c_n\boldsymbol{v_n}$ dalam tepat satu cara.

Bukti :

Karena S merentangkan V, maka dari definisi kita dapatkan bahwa setiap vektor dalam V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S. Untuk melihat bahwa hanya ada satu cara untuk menyatakan suatu vektor sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S, suatu vektor $\boldsymbol{v}$ dapat ditulis sebagai:

$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \dots + c_n\boldsymbol{v_n}$ dan juga sebagai $\boldsymbol{v} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \dots + k_n\boldsymbol{v_n}$

Dengan mengurangkan persamaan kedua dan pertama akan didapat:

$(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \dots + c_n\boldsymbol{v_n}) - (k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \dots + k_n\boldsymbol{v_n}) = 0$

$(c_1 - k_1)\boldsymbol{v_1} + (c_2 - k_2)\boldsymbol{v_2} + \dots + (c_n - k_n)\boldsymbol{v_n} = 0$

Karena ruas kiri dari persamaan ini adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor dalam *S* maka kebebasan linear mengimplikasikan bahwa :

$$c_1 - k_1 = 0, \quad c_2 - k_2 = 0, \quad \dots, \quad c_n - k_n = 0$$

Yaitu :

$$c_1 = k_1, \quad c_2 = k_2, \quad \dots, \quad c_n = k_n$$

Jadi kedua persamaan $\boldsymbol{v}$ adalah sama.

Contoh 4.15 :

Anggap $\boldsymbol{v_1} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{v_2} = (2,9,0), \boldsymbol{v_3} = (3,3,4)$. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ adalah suatu basis untuk R^3!

Penyelesaian :

1) S bebas secara linear, harus ditunjukkan satu-satunya penyelesaian dari :

   $k_1v_1 + k_2v_3 + k_3v_3 = 0$ adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$

2) S merentang R^3, harus ditunjukkan bahwa sembarang vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear :

   $k_1v_1 + k_2v_3 + k_3v_3 = b$

Dari syarat (1) diperoleh:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$
$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$$
$$k_1 + 4k_3 = 0$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dari syarat (2) diperoleh:

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1$$
$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2$$
$$k_1 + 4k_3 = b_3$$

Sehingga diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian menggunakan OBE:

Syarat (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks terakhir diperoleh matriks eselon tereduksi sehingga penyelesaiannya adalah $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$, sehingga S bebas secara linear.

Syarat (2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 9 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 4 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 5 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 5 & -3 & b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-b_3 + b_1}{2} \\ 0 & 5 & -3 & b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{-b_3 + b_1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-9b_1 + 5b_3}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -26b_1 + 6b_2 + 15b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -3b_3 + 5b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 + 9b_1 - 5b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -36b_1 + 8b_2 + 21b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -3b_3 + 5b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 + 9b_1 - 5b_3 \end{pmatrix}$$

Matriks terakhir diperoleh matriks eselon tereduksi sehingga penyelesaiannya adalah :

$k_1 = -36b_1 + 8b_2 + 21b_3$

$k_2 = -3b_3 + 5b_1 - b_2$

$k_3 = -2b_2 + 9b_1 - 5b_3$

Sehingga vektor sembarang $\boldsymbol{b}$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear, Jadi S merentang di R^3.

Karena syarat (1) dan (2) terpenuhi maka S merupakan suatu basis untuk R^3.

Perhitungan dengan menggunakan teorema.

Berdasarkan teorema 4.6, untuk membuktikan apakah suatu himpunan merupakan suatu basis, cukup dibuktikan determinan matriks koefisien adalah tidak sama dengan 0.

Untuk **Contoh 4.15** akan diperiksa apakah determinan matriks koefisien tidak sama dengan 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Karena determinan matriks koefisien tidak sama dengan 0, maka S merupakan suatu basis untuk R^3.

Berdasarkan **contoh 4.15**, karena terdapat himpunan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ beranggotakan 3 vektor dan semuanya merupakan basis untuk R^3 maka dimensi dari S adalah 3 atau ditulis $dim(S) = 3$.

H. RUANG BARIS, RUANG KOLOM DAN RUANG NOL

Definisi 4.16 : Tinjaulah matriks $m \times n$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Vektor-vektor

$\boldsymbol{r_1} \ = \ (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$

$\boldsymbol{r_2} \ = \ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$

$\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$\boldsymbol{r_m} \ = \ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$

terbentuk dari baris-baris A yang kita namakan vektor-vektor baris A, dan vektor-vektor :

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

terbentuk dari kolom-kolom A yang kita namakan **vektor-vektor kolom $\boldsymbol{A}$.** Subruang R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris disebut **ruang baris** (row space) $\boldsymbol{A}$ dan Subruang R^n yang direntang oleh vektor-vektor kolom disebut **ruang kolom** (column space) $\boldsymbol{A}$**.**

Definisi 4.17 : Dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks $\boldsymbol{A}$ dinamakan rank $\boldsymbol{A}$ dan dinyatakan dengan **rank** ($\boldsymbol{A}$)

Contoh 4.17 :

Misalkan Matriks

Vektor kolom

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor baris

dengan melakukan OBE diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan kolom-kolom pada matriks hasil OBE. Matriks $\boldsymbol{A}$ mempunyai **basis ruang kolom** yaitu :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis ruang baris diperoleh dengan cara, mentransposkan terlebih dahulu matriks A, lakukan OBE pada A^T, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolom-kolom pada matriks hasil OBE yang memiliki satu utama berseseuaian dengan matriks asal (A). Ini berarti, matriks A tersebut mempunyai **basis ruang baris** :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dimensi basis ruang baris = ruang kolom dinamakan **rank**. Jadi rank dari matriks A adalah 2.

Contoh 4.18 :

Cari basis-basis untuk ruang-ruang baris dan kolom dari:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Setelah direduksi, menjadi matriks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis untuk ruang kolom A adalah:

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix},$$

Untuk mencari basis ruang baris, matriks A ditransposkan terlebih dahulu.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 3 \\ 4 & 9 & 9 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 9 & -5 \\ 4 & 2 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$ Setelah direduksi, menjadi matriks: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis untuk ruang baris A adalah:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}^T, r_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}^T, r_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 9 \\ -1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}^T$$

Contoh 4.19 :

Carilah sebuah basis untuk ruang yang direntang oleh vektor-vektor $\boldsymbol{v_1} = (1, -2, 0, 0, 3), \boldsymbol{v_2} = (2, -5, -3, -2, 6), \boldsymbol{v_3} = (0, 5, 15, 10, 0), \boldsymbol{v_4} = (2, 6, 18, 8, 6)$!

Penyelesaian:

Ruang vektor yang direntang vektor-vektor ini adalah ruang baris dari matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} B_{21(-2)}, B_{41(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 18 & 8 & 0 \end{bmatrix} B_{3(\frac{1}{5})}, B_{4(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} B_{23(1)}, B_{43(-5)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{bmatrix} B_{4(-\frac{1}{6})}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor baris tak nol pada matriks ini adalah

$\boldsymbol{v_1} = (1, -2, 0, 0, 3), \boldsymbol{v_2} = (0, 1, 3, 2, 0)$ dan $\boldsymbol{v_3} = (0, 0, 1, 1, 0)$

Jadi rank dari matriks tersebut = 3

Basis Ruang Nol

Basis ruang nol suatu matriks dapat diperoleh dengan membentuk SPL homogen, kemudian menentukan solusi dari SPL homogen tersebut. Basis ruang nolnya itu dibangun oleh vektor-vektor pembangun ruang nol atau ruang solusi dari SPL tersebut.

Contoh 4.20 :

Diketahui SPL homogen

$2a + b - 2c - 2d = 0$
$a - b + 2c - d = 0$
$-a + 2b - 4c + d = 0$
$3a - 3d = 0$

Solusi SPL Homogen di atas dapat dicari dengan OBE terhadap matriks yang diperbesar.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{b_2 \leftrightarrow b_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{-2b_1 + b_2 \\ b_1 + b_3 \\ -3b_1 + b_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{b_2 \leftrightarrow b_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{b_2 + b_1 \\ -3b_2 + b_3 \\ -3b_2 + b_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

sehingga

$a - d = 0 \rightarrow a = d$
$b - 2c = 0 \rightarrow b = 2c$
Misalkan $c = s$ dan $d = t$ dengan $s, t \in R$ maka

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2s \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Maka, basis bagi ruang solusi adalah $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$