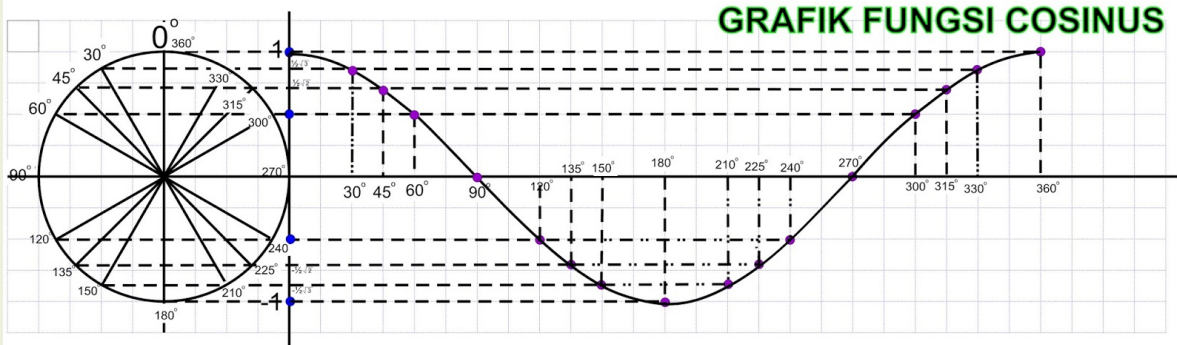
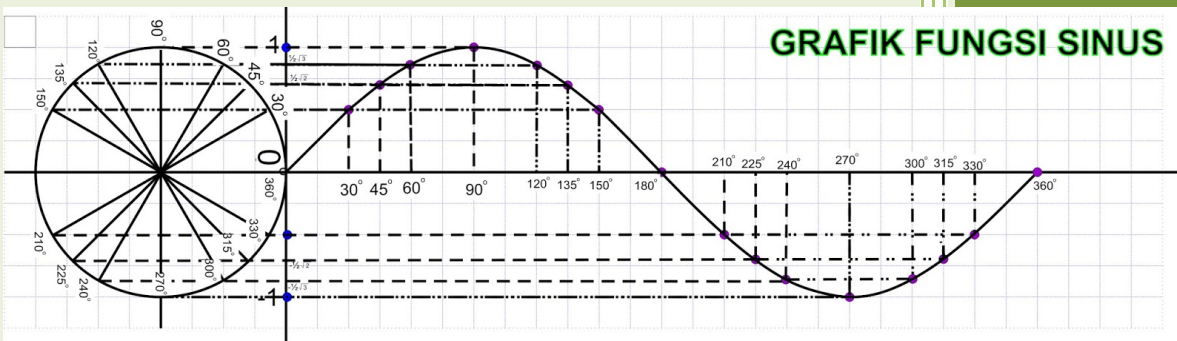




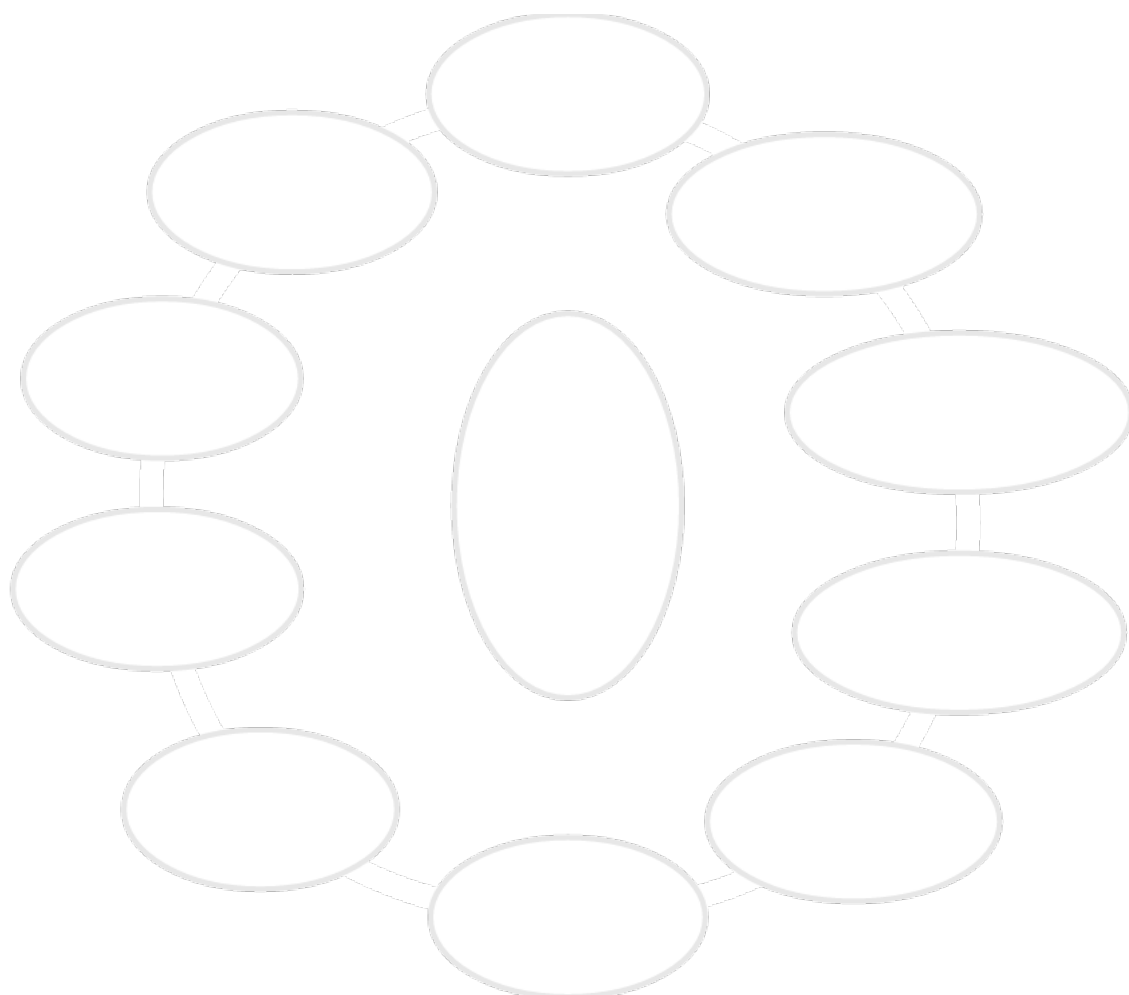
BAHAN AJAR TRIGONOMETRI



PUJI NURFAUZIAH, M.PD

VENY TRIYANA ANDIKA SARI, M.PD

TRIGONOMETRI



A. Definisi Trigonometri

Trigonometri merupakan salah satu ilmu yang berhubungan dengan besar sudut. Trigonometri berasal dari bahasa Yunani yaitu *trigonon* yang berarti tiga sudut dan *metron* yang berarti mengukur. Jadi dapat dikatakan bahwa trigonometri membahas mengenai sudut-sudut yang berada di dalam segitiga. Sebelum membahas trigonometri lebih jauh, konsep dasar yang harus difahami dalam trigonometri yaitu konsep triple Pythagoras, konsep dasar segitiga yang terdiri dari tiga buah sisi (sisi miring, sisi samping, dan sisi depan), jumlah suatu sudut dalam segitiga 180° . Setelah memahami konsep tersebut, konsep-konsep yang selanjutnya perlu difahami adalah Perbandingan segitiga siku-siku dan perhitungan pada segitiga siku-siku; Konsep perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut berelasi; Rumus jumlah, selisih, sudut ganda, sudut tengah, perkalian dan penjumlahan; Konsep identitas trigonometri; Grafik fungsi trigonometri; Persamaan dan pertidaksamaan trigonometri; Konsep aturan sinus dan aturan kosinus; Konsep luas segitiga; Aplikasi trigonometri dalam menyelesaikan soal.

Dalam pembicaraan tentang trigonometri, tidak lepas dari konsep sebuah sudut, karena dalam fungsi

trigonometri domain fungsi tersebut berupa sudut. Sebuah sudut dihasilkan oleh putaran sebuah sinar terhadap titik pangkalnya. Terdapat beberapa satuan untuk menyatakan besar sudut :

- Derajat seksagesimal, dimana satu putaran penuh dibagi menjadi 360 bagian yang sama. Setiap bagian disebut 1° . Sehingga satu putaran penuh = 360°
- Radian, Satu radian adalah besarnya sudut yang menghadap busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari.

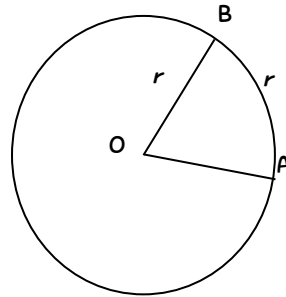
$\angle AOB = 1 \text{ rad}$, Hubungan radian dengan derajat

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} \text{ rad}$$

$$= 2\pi \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

pendekatan $1 \text{ rad} = 57,3^\circ$.



Gambar 1

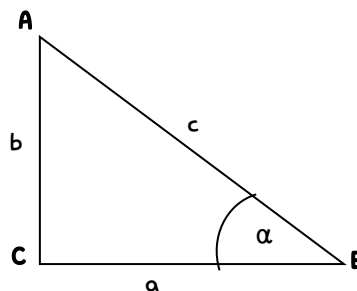
LATIHAN

1. Jika 210° dinyatakan dalam radian, maka hasilnya adalah.....
2. $0,4 \pi$ radian sama dengan....
3. $\frac{3}{4} \pi$ radian sama dengan....
4. 225° jika di rubah ke dalam bentuk radian adalah
5. $2\frac{3}{5} \pi$ radian sama dengan.....

B. Perbandingan Segitiga Siku-Siku dan Perhitungan pada Segitiga Siku-Siku

1. Perbandingan Segitiga Siku-Siku

Gambar segitiga ABC dibawah ini merupakan segitiga siku-siku. Berdasarkan gambar tersebut dapat terlihat bahwa sisi depan sudut α adalah b atau AC, sisi samping dari sudut α adalah a atau BC, dan sisi miring dari sudut α adalah c atau AB.



Gambar 2

$$\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$$

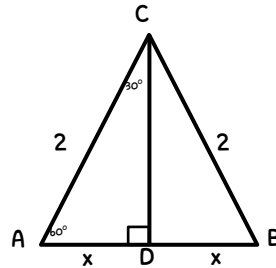
$$\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec \alpha = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \frac{c}{a} = \frac{AB}{BC}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{AB}{AC}$$

2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Istimewa

a. Sudut 30° dan 60°



Gambar 3

Gambar diatas merupakan gambar segitiga sama sisi ABC, dimana titik D merupakan titik tengah dari AB. Jika dari titik D ditarik garis yang tegak lurus AB ke C, maka segitiga tersebut terbagi menjadi dua segitiga sama besar, dan menjadi dua buah segitiga siku-siku yang kongruen. Panjang $AB = BC = CA = 2x$ satuan, sehingga $AD = DB = x$ satuan.

Berdasarkan rumus phytagoras,

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$CD^2 = (2x)^2 - (x)^2$$

$$CD^2 = 4x^2 - x^2$$

$$CD^2 = 3x^2$$

$$CD = \sqrt{3x}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \frac{2x}{x} = 2$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \frac{2x}{x} = 2$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cotan 30^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \frac{x}{x} = 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

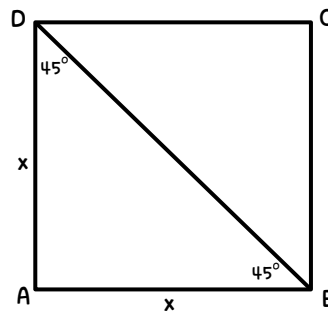
$$\cos 60^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cotan 60^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

b. Sudut 45°



Gambar 4

Gambar diatas merupakan gambar sebuah persegi ABCD. Berdasarkan gambar tersebut, dari titik B ditarik garis diagonal ke titik C. oleh karena hal tersebut, persegi ABCD terbagi menjadi dua buah segitiga siku-siku yang kongruen, dan memiliki dua buah sisi yang sama $AB = AD = x$. Berdasarkan teorema pythagoras:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = x^2 + x^2$$

$$BD^2 = 2x^2$$

$$BD = \sqrt{2x^2}$$

$$BD = x\sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

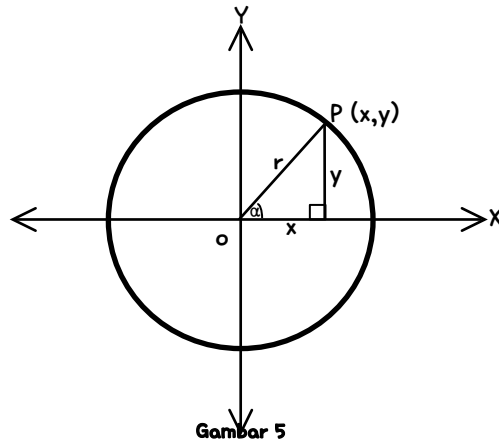
$$\sec 45^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cotan 45^\circ =$$

c. Sudut 0° dan 90° 

Gambar 5

Jika titik $P(x, y)$ mendekati sumbu X dan berhimpit dengan sumbu X, maka $x = r$, $\angle \alpha = 0^\circ$, $y = 0$.

Maka:

$$\sin 0^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cotan 0^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

Jika titik $P(x, y)$ mendekati sumbu Y dan berhimpit dengan sumbu Y, maka $y = r$, $\angle \alpha = 90^\circ$, $x = 0$.

Maka:

$$\sin 90^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\sec 90^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cos 90^\circ = \frac{\text{sisi samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{\text{sisi miring sudut } \alpha}{\text{sisi depan sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

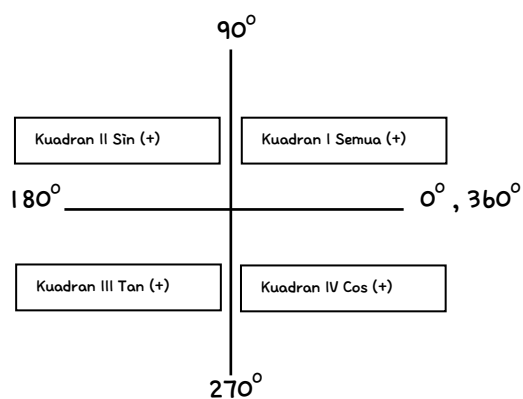
$$\tan 90^\circ = \frac{\text{sisi depan sudut } \alpha}{\text{sisi samping sudut } \alpha} = \text{---} = \text{---}$$

$$\cotan 90^\circ =$$

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Sin									
Cos									

Tan									
Sec									
Cosec									
Cotan									

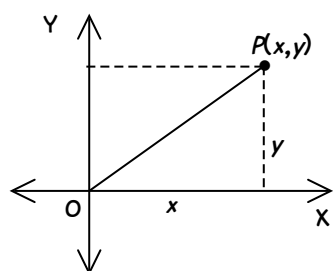
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Sin								
Cos								
Tan								
Sec								
Cosec								
Cotan								



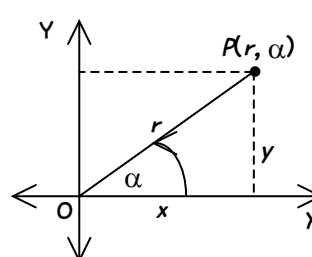
Gambar 6

3. Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub

Cara lain dalam menyajikan letak sebuah titik pada bidang xy selain koordinat kartesius adalah dengan koordinat kutub.



Koordinat kartesius



Koordinat kutub

Gambar 7

Gambar 8

Pada gambar 3.1, titik $P(x,y)$ pada koordinat kartesius dapat disajikan dalam koordinat kutub dengan $P(r, \alpha)$ seperti pada gambar 3.2. Jika koordinat kutub titik $P(r, \alpha)$ diketahui, maka koordinat kartesius dapat dicari dengan hubungan:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \alpha$$



Sehingga koordinat kutubnya adalah:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin \alpha$$

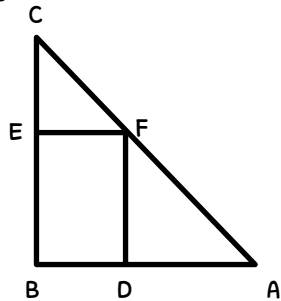
$$P(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

LATIHAN

1. Jika diketahui koordinat kartesius titik $P(b, -b)$ maka koordinat kutubnya adalah
2. Jika diketahui koordinat kutub titik $P(b\sqrt{2}, 315^\circ)$ maka koordinat kartesiusnya adalah....
3. Koordinat kartesius dari titik $A(4, 210^\circ)$ adalah
4. Koordinat kutub dari $(-3, -3)$ adalah

4. Perhitungan pada Segitiga Siku-siku

1. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C , sudut di A adalah α , jika $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. Tentukan perbandingan $\sin \alpha$ dan $\tan \alpha$.
2. Pada gambar adalah segitiga siku-siku di titik B dengan panjang sisi $AD = 4$, $AF = b$, $FC = 3$, $CE = 3$. Berapakah panjang sisi BD dan BE ?



3. Dalam $\triangle ABC$ diketahui bahwa $\cos \angle A = \frac{3}{5}$ dan $\cos \angle B = \frac{12}{13}$. Berapakah nilai $\cos \angle C$?
4. Dengan menggunakan gambar segitiga siku-siku dan α salah satu sudutnya, hitunglah perbandingan trigonometri yang belum diketahui.

a. $\sin \alpha = p$

b. $\tan \alpha = s$

c. $\cos \alpha = q$

5. Diketahui $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ dan $\sin \beta = \frac{3}{5}$ dengan α sudut lancip dan β sudut tumpul. Hitunglah:
- a. $\sin (\alpha + \beta)$ b. $\cos (\alpha + \beta)$ c. $\tan (\alpha + \beta)$
6. Diberikan $\sin \alpha = 0,6$ dan $\cos \beta = -\frac{5}{13}$, dengan α sudut lancip dan β sudut tumpul. Hitunglah:
- b. $\sin (\alpha + \beta)$ b. $\cos (\alpha + \beta)$ c. $\tan (\alpha + \beta)$ d. $\cot (\alpha + \beta)$
7. Jika A dan B masing-masing sudut lancip dengan $\sin A = 0,8$ dan $\sin B = 0,28$; tunjukkan bahwa $\cos (A+B) = \frac{44}{125}$
8. Jika $\sin \alpha = 0,4$ dan α berada di kuadran II, maka $\tan \alpha$ adalah
9. Jika $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ dan berada di kuadran III, maka $\cos \alpha$ adalah

C. Konsep Perbandingan Trigonometri untuk Sudut Berelasi

Sudut-sudut yang berelasi dengan sudut α adalah sudut $(90 \pm \alpha)^\circ$, $(180 \pm \alpha)^\circ$, $(360 \pm \alpha)^\circ$, dan $-\alpha^\circ$. Dua buah sudut yang berelasi ada yang diberi nama khusus, misalnya **penyiku** (komplemen) yaitu untuk sudut α° dengan $(90 - \alpha)^\circ$ dan **pelurus** (suplemen) untuk sudut α° dengan $(180 - \alpha)^\circ$.

1. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(90 - \alpha)^\circ$

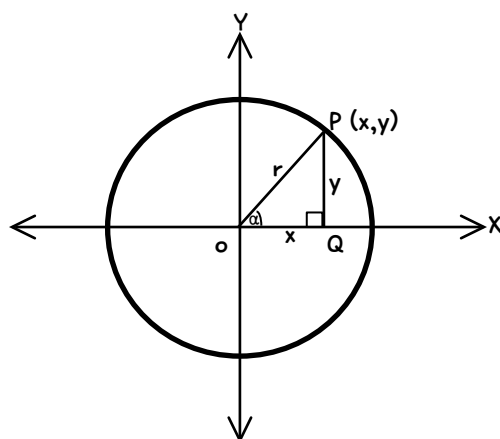
Segitiga OPQ merupakan sebuah segitiga siku-siku, dengan siku-siku di Q. Dimana $\angle O = \alpha$, $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = 90^\circ - \alpha$

$$O + P + Q = 180^\circ$$

$$\alpha + P + 90^\circ = 180^\circ$$

$$P = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$$

$$P = 90^\circ - \alpha$$



Gambar 9

$$\sin (90 - \alpha)^\circ = \frac{OQ}{OP} = \cos \alpha$$

$$\sec (90 - \alpha)^\circ = \frac{OP}{OQ} = \csc \alpha$$

$$\cos (90 - \alpha)^\circ = \frac{PQ}{OP} = \sin \alpha$$

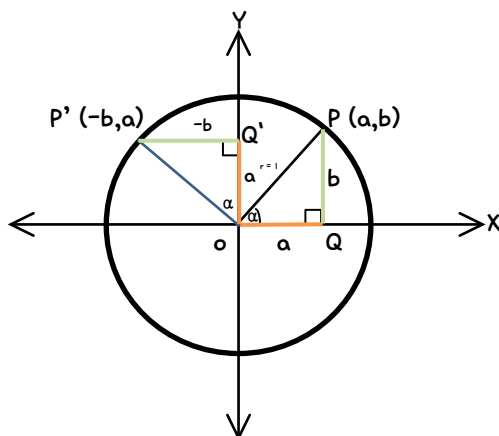
$$\operatorname{cosec} (90 - \alpha)^\circ = \frac{OP}{PQ} = \sec \alpha$$

LATIHAN

1. Dengan menggunakan sudut berelasi $(90 - \alpha)^\circ$ tentukan nilai dari $\cos 45^\circ$, $\sec 60^\circ$, dan $\tan 45^\circ$
2. Carilah nilai x yang memenuhi persamaan $\sin (2x+70)^\circ = \cos 40^\circ$!

3. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(90 + \alpha)^\circ$

Segitiga $OP'Q'$ merupakan segitiga yang diputar 90° berlawanan arah jarum jam dari segitiga OPQ , dengan $r = 1$ (lingkaran dengan jari-jari 1). Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa $P(a,b)$ sehingga $P'(-b,a)$, posisi $(-b,a)$ = posisi (a,b) pada posisi sebelum di rotasikan. Sehingga $\angle QOP' = 90^\circ + \alpha$ dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



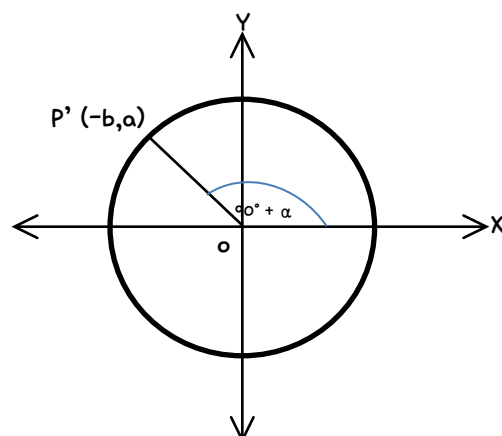
Gambar 10

Amati segitiga OPQ , dimana $P(a,b)$

$$\sin \alpha = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{1} = a$$

$$\cot \alpha = \frac{a}{b}$$



Gambar 11

Amati segitiga $OP'Q'$, dimana $P'(-b,a)$

$$\sin (90 + \alpha) = \frac{-b}{1} = -b \rightarrow -a \rightarrow a \text{ (sin di KII bernilai +)}$$

$$\cos (90 + \alpha) = \frac{a}{1} = a \rightarrow b \rightarrow -b \text{ (cos di KII bernilai -)}$$

$$\tan (90 + \alpha) = \frac{-b}{a} \rightarrow \frac{-a}{b}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin (90 + \alpha)^\circ =$$

$$\cos (90 + \alpha)^\circ =$$

$$\tan (90 + \alpha)^\circ =$$

$$\sec (90 + \alpha)^\circ =$$

$$\operatorname{cosec} (90 + \alpha)^\circ =$$

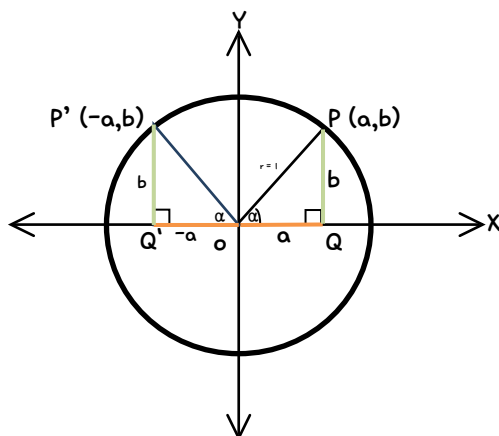
$$\cotan (90 + \alpha)^\circ =$$

LATIHAN

1. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah $\frac{\sin 120^\circ - \cos 135^\circ}{\cos 150^\circ - \sin 150^\circ}$
2. Nyatakan setiap perbandingan trigonometri berikut dalam sudut 45°
 - a. $\tan 135^\circ$
 - b. $\sin 135^\circ$
 - c. $\operatorname{cosec} 135^\circ$
3. Tentukan nilai $\tan 120^\circ$ dan $\cos 150^\circ$ dengan menggunakan aturan sudut berelasi di kuadran II !

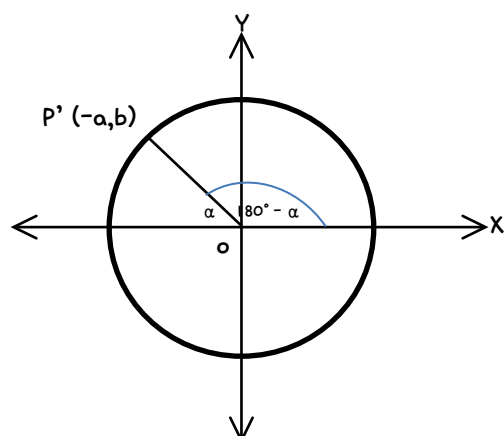
4. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(180^\circ - \alpha)^\circ$

Segitiga OPQ dicerminkan terhadap sumbu Y sehingga menghasilkan segitiga $OP'Q'$. berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa $\angle QOP' = 180^\circ - \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



Gambar 12

Amati segitiga OPQ , dimana $P(a, b)$



Gambar 13

Amati segitiga $OP'Q'$, dimana $P'(-a, b)$

$$\sin \alpha = \frac{b}{1} = b$$

$$\sin (180 - \alpha) = \frac{b}{1} = b \text{ (sin di Kiri bernilai +)}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{1} = a$$

$$\cos (180 - \alpha) = \frac{-a}{1} = -a$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\tan (180 - \alpha) = \frac{b}{-a} \rightarrow -\frac{b}{a}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin (180 - \alpha)^\circ =$$

$$\sec (180 - \alpha)^\circ =$$

$$\cos (180 - \alpha)^\circ =$$

$$\operatorname{cosec} (180 - \alpha)^\circ =$$

$$\tan (180 - \alpha)^\circ =$$

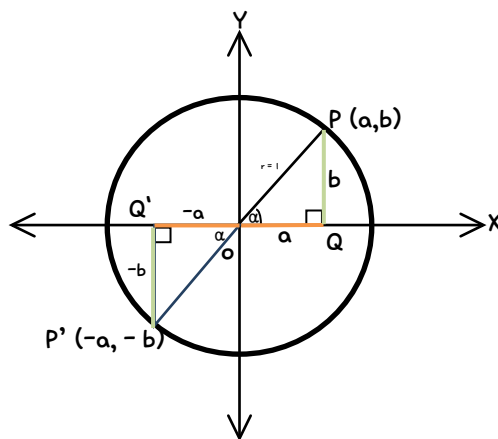
$$\cotan (180 - \alpha)^\circ =$$

LATIHAN

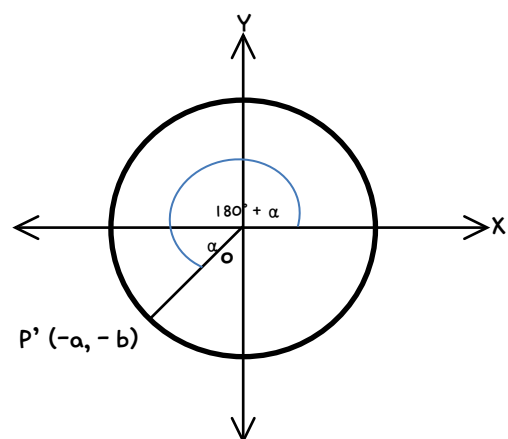
1. Carilah nilai $\sin 135^\circ$, $\cos 150^\circ$, dan $\tan 120^\circ$ dengan menggunakan refleksi 180° !
2. Tentukan berapa nilai x yang memenuhi persamaan $\sin (4x + 60)^\circ = \sin 40^\circ$!

5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(180 + \alpha)^\circ$

Segitiga $OP'Q'$ merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 180° berlawanan arah jarum jam, sehingga $\angle QOP' = 180^\circ + \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



Gambar 14



Gambar 15

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{1}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{1}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Amati segitiga OP'Q', dimana P'(-a, -b)

$$\sin (180 + \alpha) = \frac{-b}{r} = \frac{-b}{1} = -b$$

$$\cos (180 + \alpha) = \frac{-a}{r} = \frac{-a}{1} = -a$$

$$\tan (180 + \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin (180 + \alpha) =$$

$$\sec (180 + \alpha) =$$

$$\cos (180 + \alpha) =$$

$$\operatorname{cosec} (180 + \alpha) =$$

$$\tan (180 + \alpha) =$$

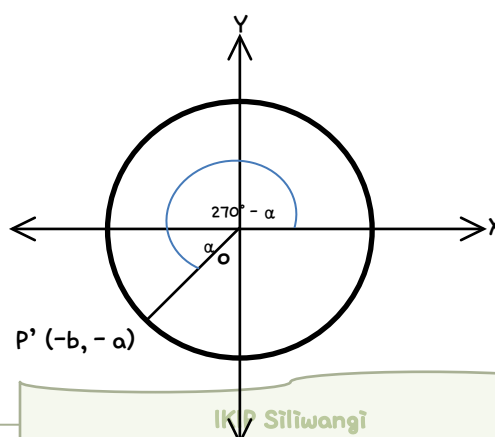
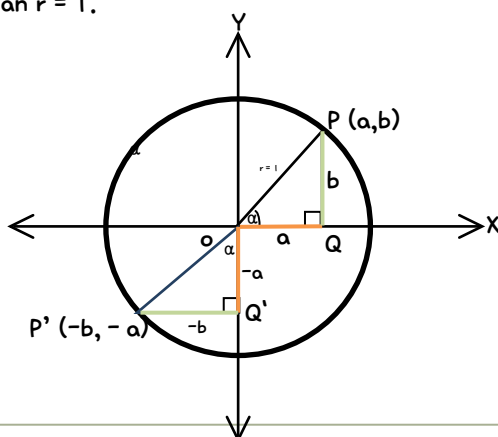
$$\cotan (180 + \alpha) =$$

LATIHAN

- Jika $\cos x = 3\sin x$, dan x terletak di kuadran III, maka nilai $\sin x, \cos x$ adalah....
- Hitunglah nilai dari perbandingan trigonometri berikut ini:
 - $\sin 270^\circ + \sin 120^\circ + \cos 225^\circ$
 - $\frac{\tan 225^\circ + \sin 210^\circ}{\cos 270^\circ - \cos 210^\circ}$
- Tentukan perbandingan trigonometri yang terletak di kuadran III pada titik:
 - P(-15, 16)
 - P(7, -12)
 - P(10, 15)

b. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(270 - \alpha)^\circ$

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 90° searah jarum jam, dan selanjutnya dicerminkan terhadap sumbu Y. Sehingga $\angle QOP' = 270^\circ - \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



Gambar 16

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$$\sin \alpha = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{1} = a$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin (270 - \alpha) =$$

$$\cos (270 - \alpha) =$$

$$\tan (270 - \alpha) =$$

$$\sec (270 - \alpha) =$$

$$\operatorname{cosec} (270 - \alpha) =$$

$$\cotan (270 - \alpha) =$$

Gambar 17

Amati segitiga OP'Q', dimana P'(-b, -a)

$$\sin (270 - \alpha) = \frac{-b}{1} = -b = -\sin \alpha$$

$$\cos (270 - \alpha) = \frac{-a}{1} = -a = -\cos \alpha$$

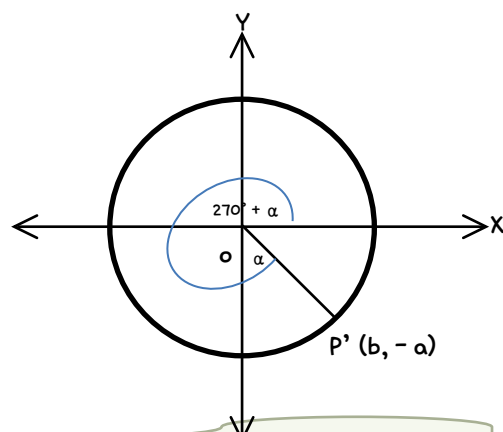
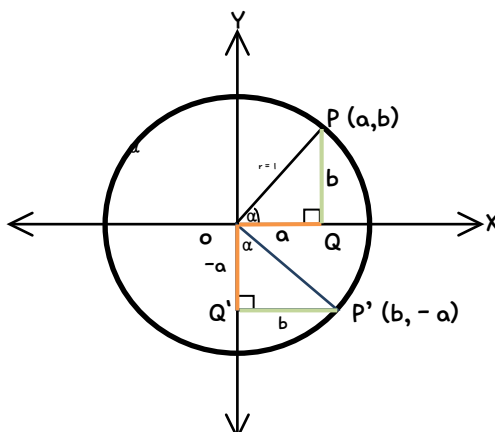
$$\tan (270 - \alpha) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan \alpha$$

LATIHAN

1. Carilah nilai α jika $\sin (270 - \alpha)^\circ = -\frac{1}{2}$
2. Dengan menggunakan sudut berelasi di kuadran III, maka buktikan bahwa $\sin (180 + \alpha) = -\sin \alpha$ sama dengan $\sin (270 - \alpha) = -\cos \alpha$

7. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(270^\circ + \alpha)$

Segitiga OP'Q' merupakan segitiga OPQ yang diputar sejauh 90° searah jarum jam. Sehingga $\angle QOP' = 270^\circ + \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



Gambar 18

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{a}{1} = a$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

Gambar 19

Amati segitiga OP'Q', dimana P'(-b, -a)

$$\sin (270 + \alpha) = \frac{b}{r} = \frac{b}{1} = -a$$

$$\cos (270 + \alpha) = \frac{-a}{r} = \frac{-a}{1} = -a = b$$

$$\tan (270 + \alpha) = \frac{b}{-a} \rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{a}{b}$$

$$\sin (270 + \alpha) =$$

$$\sec (270 + \alpha) =$$

$$\cos (270 + \alpha) =$$

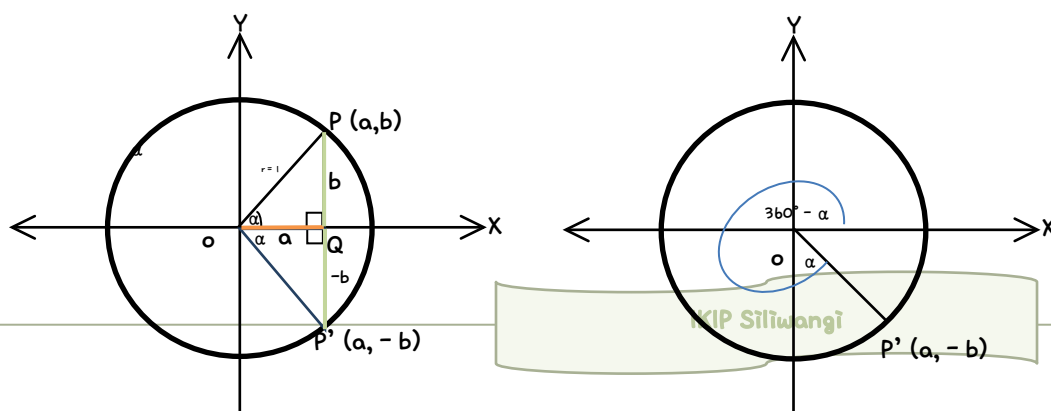
$$\operatorname{cosec} (270 + \alpha) =$$

$$\tan (270 + \alpha) =$$

$$\cotan (270 + \alpha) =$$

8. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut α dengan $(360^\circ - \alpha)$ atau $-\alpha$

Segitiga OP'Q merupakan segitiga OPQ yang dicerminkan terhadap sumbu x. Sehingga $\angle QOP' = 360^\circ - \alpha$, dan kedua segitiga terletak pada lingkaran dengan $r = 1$.



Gambar 20

Amati segitiga OPQ, dimana P (a,b)

$$\sin \alpha = \frac{b}{l} = b$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{l} = a$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\sin (360^\circ - \alpha) =$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) =$$

$$\tan (360^\circ - \alpha) =$$

$$\sec (360^\circ - \alpha) =$$

$$\operatorname{cosec} (360^\circ - \alpha) =$$

$$\cotan (360^\circ - \alpha) =$$

Gambar 21

Amati segitiga OP'Q, dimana P'(a, -b)

$$\sin (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{l} = -b$$

$$\cos (360^\circ - \alpha) = \frac{a}{l} = a$$

$$\tan (360^\circ - \alpha) = \frac{-b}{a} \rightarrow -\frac{b}{a}$$

LATIHAN

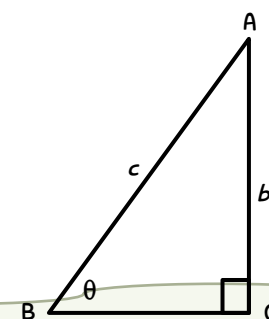
1. Carilah nilai $\sin$, $\cos$, dan $\tan$ berikut ini dengan menggunakan refleksi 180° dan 360°
2. Jika $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $0 < x < 2\pi$, maka x adalah.....
3. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sin (2x + 70^\circ) = \cos$
4. Jika $\tan x = \sqrt{3}$ dan $0 < x < 2\pi$, maka $x = \dots$
5. Dengan menggunakan sudut relasi sudut 270° dan 360° tentukan $\sec 300^\circ$ dan $\tan 330^\circ$

D. Konsep Identitas Trigonometri

Identitas trigonometri diturunkan dari teorema pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$



IKIP Siliwangi
Gambar 22

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Berdasarkan konsep identitas yang telah didapat di atas, buktikan identitas trigonometri berikut:

$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

LATIHAN

1. Buktikan $\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$
2. Buktikan $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$
3. Buktikan $(\tan \theta - \cot \theta) = \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$
4. Buktikan $\tan x \sin x + \cos x = \sec x$
5. Buktikan $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

E. Rumus Jumlah, Selisih, Sudut Ganda, Sudut Tengahan, Perkalian dan Penjumlahan

1. Rumus Jumlah dan Selisih $\cos(\alpha + \beta)$ dan $\cos(\alpha - \beta)$

Pada gambar di samping diketahui garis CD dan AF keduanya adalah garis tinggi dari segitiga ABC. Akan dicari rumus $\cos(\alpha + \beta)$.

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC} \rightarrow AD = AC \cos(\alpha + \beta)$$

Pada segitiga siku-siku CGF

$$\sin \alpha = \frac{GF}{CF} \rightarrow GF = CF \sin \alpha \quad \dots\dots\dots(1)$$

Pada segitiga siku-siku AFC,

$$\sin \beta = \frac{CF}{AC} \rightarrow CF = AC \sin \beta \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\cos \beta = \frac{AF}{AC} \rightarrow AF = AC \cos \beta \quad \dots\dots\dots(3)$$

Pada segitiga siku-siku AEF,

$$\cos \alpha = \frac{AE}{AF} \rightarrow AE = AF \cos \alpha \quad \dots\dots\dots(4)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh

$$GF = AC \sin \alpha \sin \beta$$

Karena $DE = GF$ maka $DE = AC \sin \alpha \sin \beta$

Dari (3) dan (4) diperoleh

$$AE = AC \cos \alpha \cos \beta$$

Sehingga $AD = AE - DE$

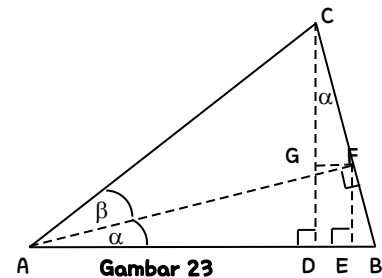
$$AC \cos(\alpha + \beta) = AC \cos \alpha \cos \beta - AC \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Jadi untuk menentukan $\cos(\alpha - \beta)$ gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke rumus $\cos(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha (-\sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$



Gambar 23

2. Rumus Jumlah dan Selisih $\sin (\alpha + \beta)$ dan $\sin (\alpha - \beta)$

Untuk menentukan rumus $\sin (\alpha + \beta)$ dan $\sin (\alpha - \beta)$ perlu diingat rumus sebelumnya, yaitu: $\sin (90^\circ - \alpha)$

$$= \cos \alpha \text{ dan } \cos (90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}\sin (\alpha + \beta) &= \cos (90^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \cos ((90^\circ - \alpha) - \beta) \\ &= \cos (90^\circ - \alpha) \cos \beta + \sin (90^\circ - \alpha) \sin \beta \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Untuk menentukan $\sin (\alpha - \beta)$, seperti rumus kosinus selisih dua sudut gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke $\sin (\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}\sin (\alpha - \beta) &= \sin (\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin \alpha \cos (-\beta) + \cos \alpha \sin (-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

3. Rumus Jumlah dan Selisih $\tan (\alpha + \beta)$ dan $\tan (\alpha - \beta)$

Dengan mengingat $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, maka

$$\begin{aligned}\tan (\alpha + \beta) &= \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ \tan (\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Jadi

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

Untuk menentukan $\tan(\alpha - \beta)$, gantilah β dengan $-\beta$ lalu disubstitusikan ke $\tan(\alpha + \beta)$.

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan(\alpha + (-\beta)) \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 - \tan \alpha (-\tan \beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

Jadi

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

4. Rumus Trigonometri Sudut Ganda

Dari rumus–rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut, dapat dikembangkan menjadi rumus trigonometri untuk sudut rangkap.

a. $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

b. $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Rumus–rumus variasi bentuk lain yang memuat $\cos 2\alpha$ dapat diturunkan dengan mengingat rumus dasar

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

Sehingga

$$1) \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$2) \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$3) \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan (\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

c.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

5. Rumus $\sin$, $\cos$, danJika α sudut, maka:

a. $\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau II dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran III atau IV

Bukti:

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \dots\dots\dots (1)$$

Jika $A = \frac{1}{2}\alpha$, maka (1) menjadi:

$$\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 - \cos 2(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{terbukti}$$

b. $\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau IV dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran II atau III

Bukti:

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2} \dots\dots\dots (2)$$

Jika $A = \frac{1}{2}\alpha$, maka (2) menjadi:

$$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \cos 2(\frac{1}{2}\alpha)}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad \text{terbukti}$$

c. $\tan \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, dengan tanda (+) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran I atau III dan tanda (-) untuk $\frac{1}{2}\alpha$ di kuadran II atau IV

Bukti:

Telah diketahui sebelumnya pada pembuktian (a) dan (b) bahwa:

$$\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad \text{dan} \quad \cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \text{ maka:}$$

$$\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{terbukti}$$

d. $\tan \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Bukti:

1. Telah diperoleh bahwa $\tan \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, maka:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \times \frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \end{aligned}$$

2. Telah diperoleh bahwa $\tan \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, maka:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}\alpha &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \times \frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned}$$

Selain dengan teorema sudut pertengahan, seringkali teorema sudut ganda digunakan dalam menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan sudut pertengahan.

1. $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha$

2. a. $\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\alpha$

b. $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{1}{2}\alpha - 1$

c. $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$

3. $\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1-\tan^2\frac{1}{2}\alpha}$

4. $\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{1}{2}\alpha}{1+\tan^2\frac{1}{2}\alpha}$

7. Mengubah Rumus Perkalian ke rumus Penjumlahan/Pengurangan**a. Dari rumus cosinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:**

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \cos \beta \quad +\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \quad -\end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

b. Dari rumus sinus untuk jumlah dan selisih 2 sudut diperoleh:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= 2 \sin \alpha \cos \beta \quad +\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \hline \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= 2 \cos \alpha \sin \beta \quad -\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

c. Rumus Penjumlahan dan Pengurangan sin dan cos

Jika α dan β adalah sudut-sudut sembarang, maka:

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

LATIHAN

1. Jabarkanlah!

a. $\sin (x + 5y)$

b. $\cos (x + 30^\circ)$

c. $\tan \left(\frac{\pi}{2} + y \right)$

2. Buktikan bahwa:

a. $\sin \left(\frac{\pi}{2} + y \right) = \cos x$

b. $\cos (90 + x)^\circ = -\sin x^\circ$

c. $\tan (180 + x)^\circ = \tan x$

3. Jabarkanlah:

a. $\sin (x - 3y)$

b. $\cos (3a - 4b)$

c. $\tan (3p - q)$

4. Buktikan bahwa:

a. $\sin (x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x)$

b. $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = -\sin x$

c. $\tan (2\pi - x) = -\tan x$

5. Hitunglah:

a. $\sin \frac{5\pi}{9} \cos \frac{\pi}{18} - \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{\pi}{18}$

b. $\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{12}$

c.
$$\frac{\tan \frac{7\pi}{9} - \tan \frac{\pi}{9}}{1 + \tan \frac{7\pi}{9} \tan \frac{\pi}{9}}$$

b. $\sin 105^\circ =$

7. $\sin 172^\circ \cos 37^\circ - \cos 172^\circ \sin 37^\circ =$
8. $\sin (62+28)^\circ =$
9. Nyatakan bentuk $\cos (x - 53)^\circ$ ke dalam bentuk yang paling sederhana!
10. $\sin A = \frac{3}{5}$ dan A sudut lancip, maka tentukanlah $\sin 2A$ dan $\cos 3A$!
11. Tentukan $\sin 2\alpha$ jika $\sin \alpha + \cos \alpha = b$
12. Selesaikanlah bentuk perkalian sinus dan cosinus di bawah ini:
 - a. $2 \sin 45^\circ \cos 8^\circ$
 - b. $2 \cos (\pi - A) \sin (\pi + A)$

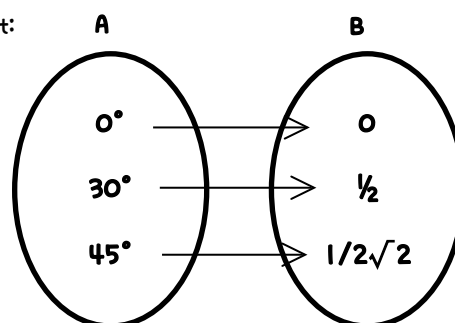
F. Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri merupakan suatu fungsi yang melibatkan bentuk trigonometri, misalkan fungsi sinus, cosinus, tangen, secan, cosecant dan cotangent. **Grafik fungsi trigonometri**, artinya penekanan ada pada grafiknya. Selain grafik, ada nilai maksimum atau minimum suatu fungsi trigonometri dengan memanfaatkan bentuk grafik fungsi trigonometri masing-masing dan rumus-rumus dasar yang ada pada trigonometri.

1. Fungsi Sinus, Cosinus dan Tangen

a) Fungsi Sinus

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 23. Hubungan antara himpunan A ke B

Gambar 23 menunjukkan suatu fungsi karena jika $x = 0$ maka $\sin 0 = 0$, jika $x = 30$ maka $\sin 30 = \frac{1}{2}$, dan jika $x = 45$ maka $\sin 45 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Apakah Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan real $\sin x^\circ$ disebut fungsi sinus. fungsi sinus dapat dilambangkan dengan $f: x^\circ \rightarrow \sin x^\circ$ (f

memetakan x° ke sinus x°). Jadi, rumus untuk fungsi sinus adalah $f(x^\circ) = \sin x^\circ$ atau $f(x) = \sin x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = 1 - \sin^2 x$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	$y = f(x) = 1 - \sin^2 x$
1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $= 1 - \sin^2(60^\circ)$ $= 1 - \dots$ $= \dots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $= \dots - \dots$ $= \dots - \dots$ $= \dots$
3.	$2\pi/3$	$y = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ $= \dots - \dots$ $= \dots - \dots$ $= \dots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $= \dots - \dots$ $= \dots - \dots$ $= \dots$
5.	π	$y = f(\pi) = 1 - \sin^2(\pi)$ $= \dots - \dots$ $= \dots - \dots$ $= \dots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 1

Jika diketahui fungsi $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$ maka nilai $f(x)$ adalah...

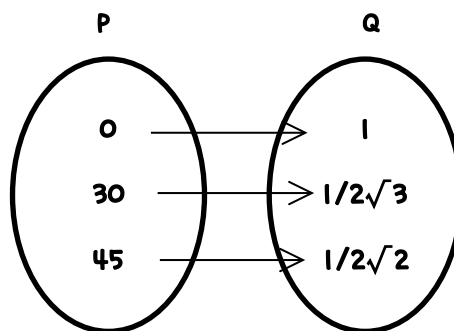
Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1	Penyelesaian 2
----------------	----------------

$f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{b}\right)$ $= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3b}\right)$ $= 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi^2}{3b}\right)$ $= 1 - 2\sin^2\left(\frac{32400^\circ}{3b}\right)$ $= 1 - 2\sin^2(900^\circ)$ $= 1 - 2(0) = 1$ Jadi, $f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 1$	$f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{b}\right)$ $= 1 - 2\sin^2(30^\circ)$ $= 1 - 2(1/2)^2$ $= 1 - 2(1/4)$ $= 1 - (1/2)$ $= 1/2$ Jadi, $f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 1/2$
--	---

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

b) Fungsi Cosinus



Gambar 24. Hubungan antara himpunan P ke Q

Gambar 24 menunjukkan suatu fungsi karena jika $x = 0$ maka $\cos 0 = 1$, jika $x = 30$ maka $\cos 30 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan jika $x = 45$ maka $\cos 45 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan real $\cos x^\circ$ disebut fungsi cosinus. fungsi cosinus dapat dilambangkan dengan $f: x^\circ \rightarrow \cos x^\circ$ (f memetakan x° ke cosinus x°). Jadi, rumus untuk fungsi cosinus adalah $f(x^\circ) = \cos x^\circ$ atau $f(x) = \cos x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	$y = f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$
-----	-----	--

1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + \sin(\pi/3)}{\cos^2(\pi/3)}$ $= \frac{1 + \dots}{\dots}$ $= \frac{\dots}{\dots}$ $= \dots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sin(\pi/4)}{\cos^2(\pi/4)}$ $= \frac{1 + \dots}{\dots}$ $= \frac{\dots}{\dots}$ $= \dots$
3.	π/b	$y = f\left(\frac{\pi}{b}\right) = \frac{1 + \sin(\pi/b)}{\cos^2(\pi/b)}$ $= \frac{1 + \dots}{\dots}$ $= \frac{\dots}{\dots}$ $= \dots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \sin(\pi/2)}{\cos^2(\pi/2)}$ $= \frac{1 + \dots}{\dots}$ $= \frac{\dots}{\dots}$ $= \dots$
5.	π	$y = f(\pi) = \frac{1 + \sin(\pi)}{\cos^2(\pi)}$ $= \frac{1 + \dots}{\dots}$ $= \frac{\dots}{\dots}$ $= \dots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 1

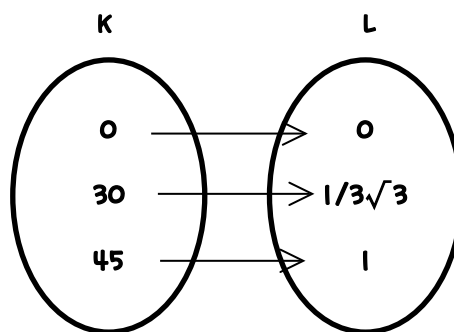
Jika diketahui fungsi $f(x) = 2\cos^2 x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$ maka nilai $f(x)$ adalah...

Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1	Penyelesaian 2
$f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{b}\right)$	$f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{b}\right)$
$= 2\cos\left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$= 2\cos^2(30^\circ)$
$= 2\cos\left(\frac{\pi^2}{3b}\right)$	$= 1 - 2(1/2\sqrt{3})^2$
$= 2\cos\left(\frac{32400^\circ}{3b}\right)$	$= 1 - 2(1/12)$
$= 2\cos(900^\circ)$	$= 1 - (2/12)$
$= 2(-1) = -2$	$= 10/12$
$\text{Jadi, } f\left(\frac{\pi}{b}\right) = -2$	$\text{Jadi, } f\left(\frac{\pi}{b}\right) = 5/6$

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

c) Fungsi Tangen



Gambar 25. Hubungan antara himpunan K ke L

Gambar 25 menunjukkan suatu fungsi karena jika $x = 0$ maka $\tan 0 = 0$, jika $x = 30$ maka $\tan 30 = 1/3\sqrt{3}$, dan jika $x = 45$ maka $\tan 45 = 1$. Oleh karena itu, fungsi yang memetakan himpunan sudut x° ke himpunan bilangan real $\tan x^\circ$ disebut fungsi tangen. fungsi sinus dapat dilambangkan dengan $f: x^\circ \rightarrow \tan x^\circ$ (f memetakan x° ke tangen x°). Jadi, rumus untuk fungsi tangen adalah $f(x^\circ) = \tan x^\circ$ atau $f(x) = \tan x$ untuk x dalam ukuran radian.

Jika $y = f(x) = \tan x + 1$ maka hitunglah nilai fungsi trigonometri, jika diketahui x seperti berikut ini!

No.	x	y = f(x) = tan x + 1
1.	$\pi/3$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \dots + 1$ $= \dots$
2.	$\pi/4$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \dots + 1$ $= \dots$
3.	$\pi/6$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \dots + 1$ $= \dots$
4.	$\pi/2$	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \dots + 1$ $= \dots$
5.	π	$y = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$ $= \dots + 1$ $= \dots$

Setelah mengerjakan soal tersebut coba periksalah persoalan berikut apakah sudah sesuai dengan konsep yang dipelajari.

Contoh 1

Jika diketahui fungsi $f(x) = 1 - 2\tan x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$ maka nilai $f(x)$ adalah...

Penyelesaiannya:

Penyelesaian 1	Penyelesaian 2
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $= 1 - \tan\left(\frac{2\pi}{6}\right)$ $= 1 - \tan(60^\circ)$ $= 1 - (\sqrt{3})$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ $= 1 - 2\tan(30^\circ)$ $= 1 - 2(\sqrt{3})$ $= 1 - (3,4641)$ $= -2,4641$

$= 1 - (1,7321)$ $= -0,7321$ $\text{Jadi, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0,7321$	$\text{Jadi, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2,4641$
--	---

Periksalah kebenaran hasil penyelesaian 1 & 2 dari contoh 1 yang diperlihatkan, kemudian tunjukkan kekeliruan yang terlihat dari penyelesaian yang salah.

LATIHAN

Kerjakanlah soal-soal berikut dengan benar dan tepat!

- Diketahui sebuah fungsi $f(x) = \frac{\sin^2 x + \tan 2x}{\cos x}$, maka tentukan nilai fungsi:
 - $f(180^\circ)$
 - $f(225^\circ)$
 - $2f(135^\circ)$
- Jika bentuk fungsi $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x + c$ dan titik yang dilalui $(\sin x, f(x))$ yakni $(3, 2)$, $(1, 0)$ dan $(-1, -2)$, maka tentukan nilai a , b , dan c sebagai koefisien dari variabel fungsi tersebut.

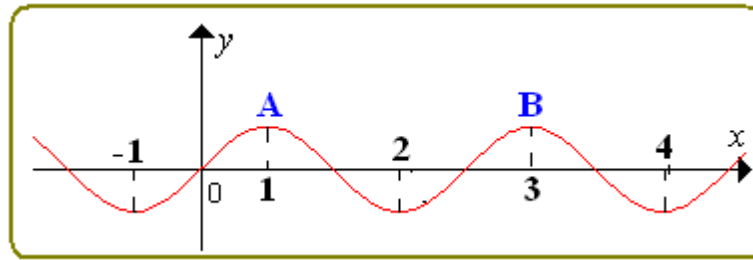
2. Fungsi Periodic

Fungsi periodik adalah suatu fungsi yang grafiknya berulang secara terus-menerus dalam setiap periode tertentu. Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi periodik dengan periode p , jika memenuhi $f(x+p) = f(x)$ dengan $x \in \mathbb{R}$. Istilah lain dari fungsi tersebut yakni periode dasar (periode primitif) fungsi f . Jika fungsi f periodic primitive p , maka periode-periode dari fungsi f adalah $n \times p$, dengan n adalah bilangan asli.

Teorema:

Jika f dan g adalah fungsi yang periodik dengan periode p , maka $f + g$ dan fg juga periodik dengan periode p .

Perhatikan Gambar 2b berikut ini:

Gambar 2b. Grafik Fungsi $f(x)$

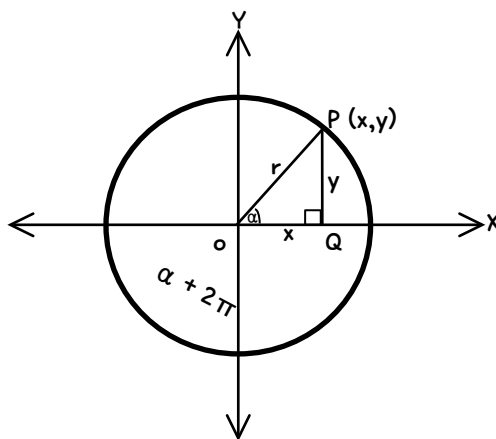
- Apakah fungsi $f(x)$ merupakan fungsi periodik?
- Jika $f(x)$ merupakan fungsi periodik, tentukan periodenya?

Penyelesaian:

- Pada Gambar b.4, terlihat jelas bahwa fungsi $f(x)$ adalah fungsi periodik karena grafiknya selalu berulang
- Perhatikan titik puncak A dan B, dimana titik puncak B adalah pengulangan kembali titik puncak A, ini artinya fungsi $f(x)$ mengalami pengulangan setiap jaraknya sama dengan dari titik A ke titik B. Dimana jarak titik A dan B adalah 2, sehingga periode fungsi tersebut adalah 2, atau memenuhi $f(x+2) = f(x)$.

Fungsi trigonometri merupakan fungsi periodik. Grafik baku trigonometri merupakan grafik sederhana yang terdiri fungsi trigonometri. Periode fungsi trigonometri antara lain:

- Periode Fungsi Sinus dan Kosinus



- $\sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin \alpha$, dengan $k \in \mathbb{B}$ atau $\sin(\alpha + k \times 360^\circ) = \sin \alpha^\circ$, dengan $k \in \mathbb{B}$.
- $\cos(\alpha + k \times 2\pi) = \cos \alpha$, dengan $k \in \mathbb{B}$ atau $\cos(\alpha + k \times 360^\circ) = \cos \alpha^\circ$, dengan $k \in \mathbb{B}$.

DAFTAR PUSTAKA

Syarah, S.P. (2011). *IM-1 Intisari Matematika 1 Untuk SMA/MA Kelas X*. Yogyakarta: Andi.

Syarah, S.P. (2011). *IM-2 Intisari Matematika 2 Untuk SMA/MA Kelas XI*. Yogyakarta: Andi.

Tampomas, H. (2007). *Seribu Pena Matematika untuk SMA/MA Kelas XI*. Jakarta: Erlangga.

<https://googleweblight.com/i?u=https://mathematics4us.com/perbandingan-trigonometri-pada-segitiga-siku-siku/&hl=id-ID>

<https://maths.id/pembuktian-identitas-trigonometri.php>