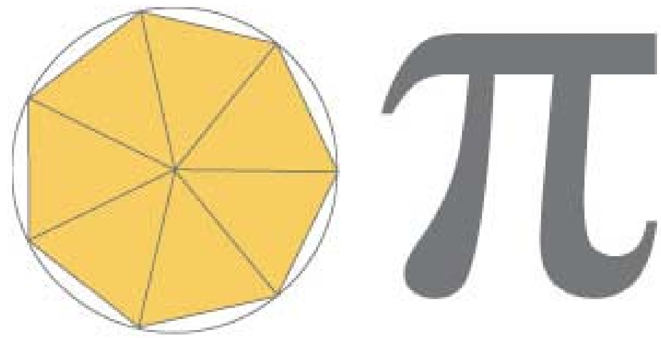
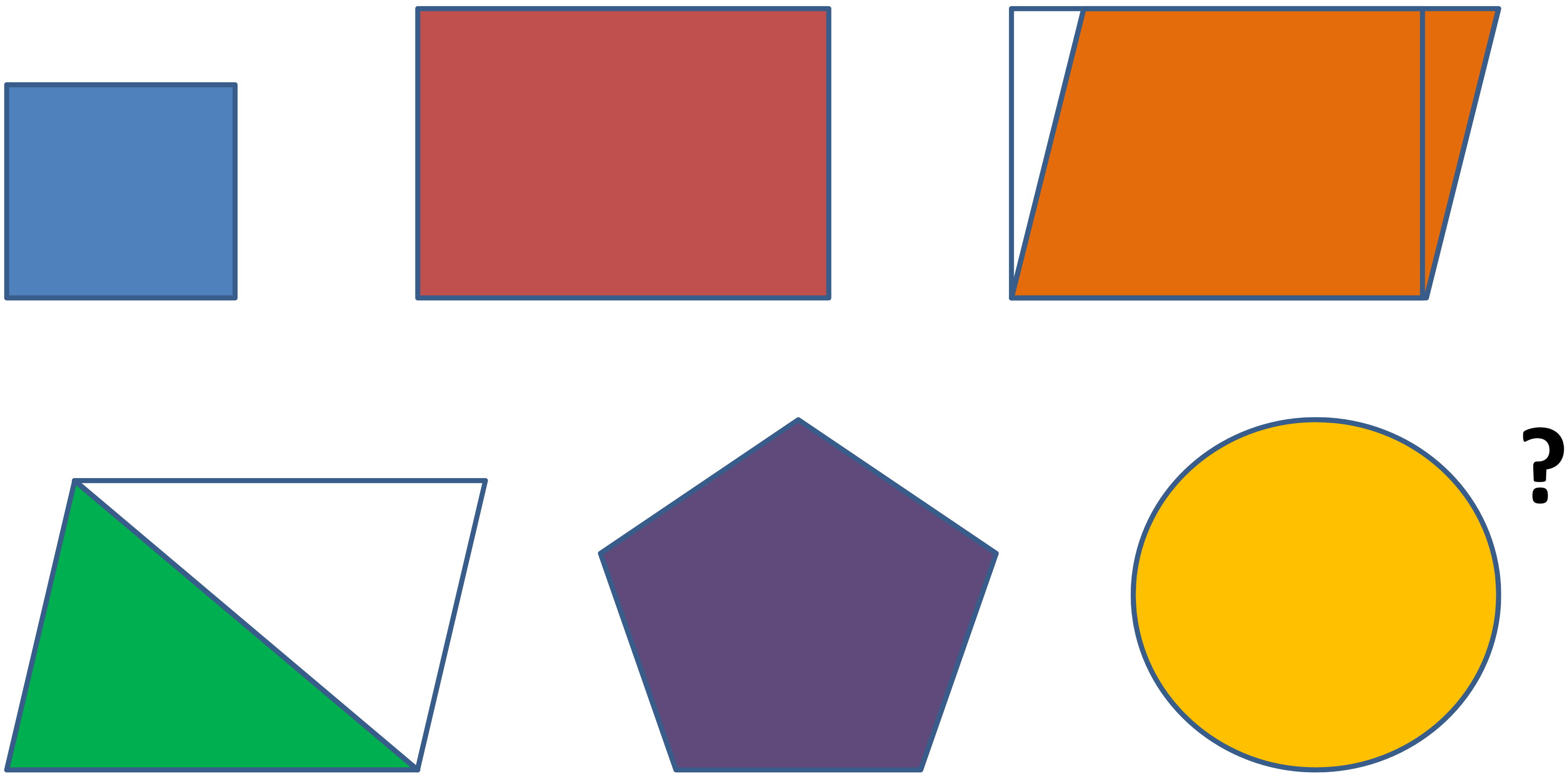


22/7: Aproksimasi Nilai Π

Hendra Gunawan

Freedom Institute, 22 Juli 2013

Orang Babilonia & Mesir Kuno sebagai Geo-meter (Ahli ukur Bumi): Mengukur keliling dan luas tanah



Napak Tilas

- Perjanjian Lama, Kitab Raja-Raja I, 7:23

  "Then he made the molten sea; it was round, ten cubits from brim to brim, and five cubits high, and a line of thirty cubits measured its circumference."

  Di sini, $\Pi \approx 3$.

Napak Tilas

- Susa Clay Tablet, Babilonia, ~2000-1000 SM

$\Pi \approx 3\frac{1}{8}$

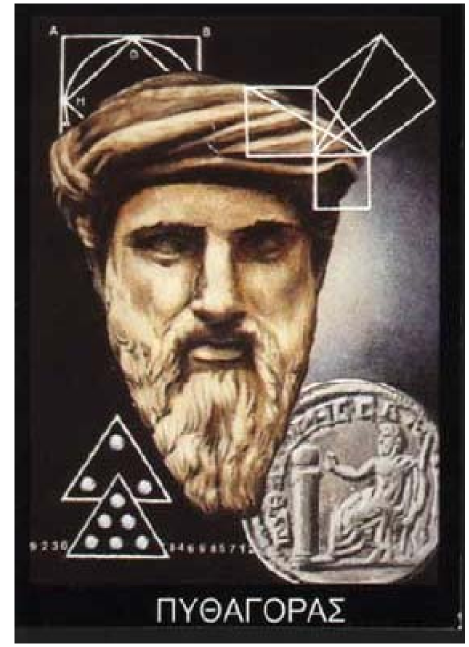
Napak Tilas

- Rhind Mathematical Papyrus, Mesir Kuno, ~1650 SM

  Luas lingkaran berjari-jari r dihitung dengan rumus $(4/3)^4 r^2$.

- Di sini, $\Pi \approx 3,16$.
- [Mitos ttg Piramida Besar, ~2600 SM: $\Pi \approx$ ½ keliling alas dibagi tinggi = 3,14 menjadi tidak masuk akal.]

Era Yunani Kuno



NaMaas.org

- Pythagoras (~530 SM):

  “All things are (rational) numbers.”

- Hippasus, murid Pythagoras (~470 SM):

  “√2 irasional”

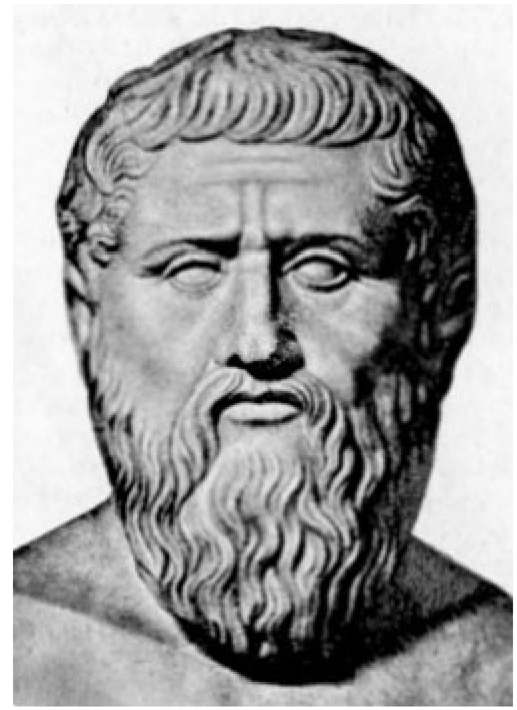
  (Tidak ada bilangan rasional r sehingga $r^2 = 2$.)

Algoritma Euclid dan Aproksimasi Bilangan Irasional

- Diberikan bilangan X_1, bentuk barisan bilangan
  $X_2 = 1/(X_1 - [X_1])$, $X_3 = 1/(X_2 - [X_2])$, …
  $F_1 = [X_1]$, $F_2 = [X_2]F_1 + 1$, $F_3 = [X_3]F_2 + F_1$, …
  $G_1 = 1$, $G_2 = [X_2]$, $G_3 = [X_3]G_2 + G_1$, …
  dengan $[x]$ = bilangan bulat terbesar yang $\leq x$.
- Jika $X_1 = \sqrt{R}$, maka F_n/G_n merupakan suatu hampiran untuk $\sqrt{R}$.
- Sebagai contoh, Archimedes menaksir $\sqrt{3} \approx 265/153$. (Kelak ybs memakai ini untuk menaksir Π.)

Antiphon & Lingkaran

- Antiphon (425 SM) membuktikan bahwa luas segi-2^n beraturan "di dalam lingkaran" lebih besar dari ($1 - 2^{1-n}$) kali luas lingkaran.
- Karena luas segi-2^n beraturan sebanding dengan kuadrat "diameter"-nya, Antiphon lalu menyimpulkan bhw luas lingkaran juga mesti sebanding dgn kuadrat diameternya: $L = k(2r)^2 = 4kr^2$.

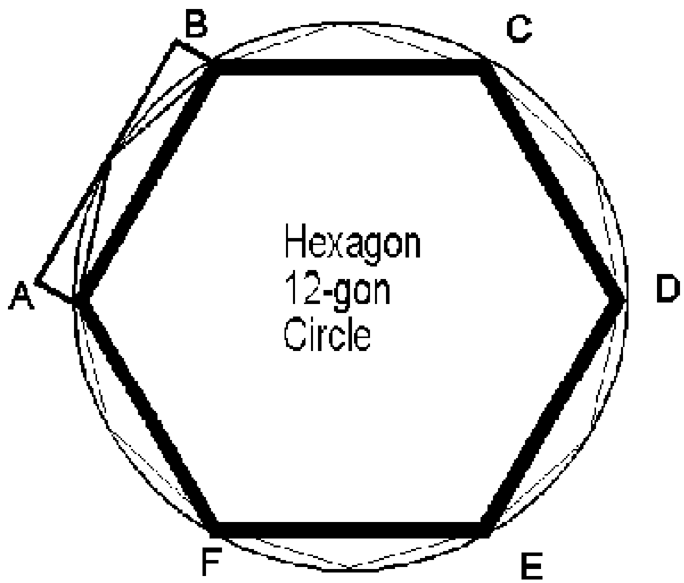


perseus.mpiwg-berlin.mpg.de

Eudoxus & Lingkaran

- Fakta bahwa luas lingkaran sebanding dengan kuadrat diameternya dibuktikan* secara *rigorous* oleh Eudoxus (~375 SM).

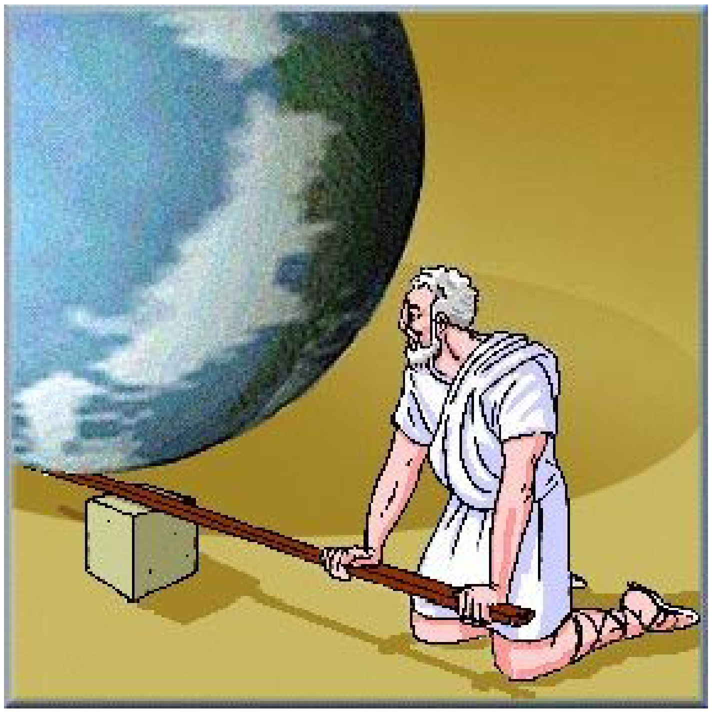
people.famouswhy.com



*Dalam pembuktiannya, Eudoxus juga menggunakan fakta bahwa luas segi-2^n beraturan "yang memuat lingkaran" lebih kecil dari ($1 + 2^{2-n}$) kali luas lingkaran tersebut, selain fakta yang telah dibuktikan o/ Antiphon.

Archimedes dari Syracuse (287-212 SM)

"*Give me a place to stand on and I can lift the earth*."



http://www.brooklynprospect.org

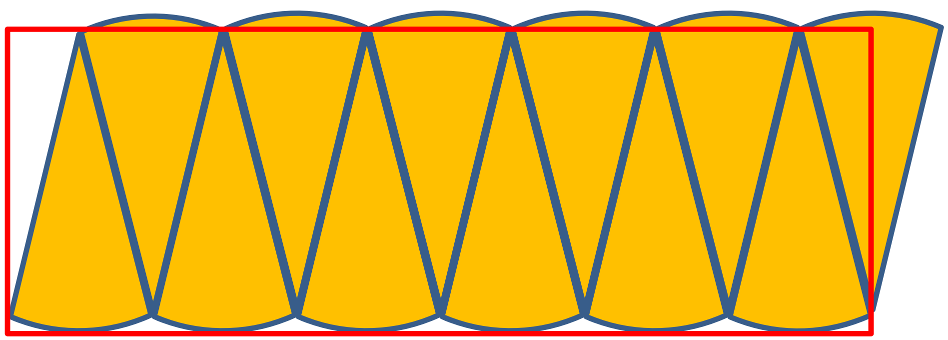
Archimedes dapat dikatakan sebagai matematikawan dan fisikawan terhebat sebelum Isaac Newton.

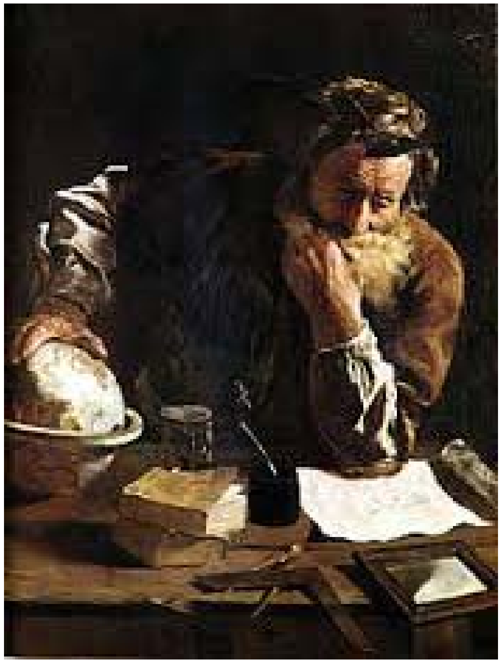
Banyak kisah ttg Archimedes, a.l. teriakan *Eureka!* ketika ia menemukan cara menghitung volume sebuah mahkota.

Demikian pula tentang kematiannya di tangan seorang tentara Roma yang menyerang Syracuse.

Archimedes & Lingkaran

- Archimedes membuktikan bahwa luas lingkaran sama dengan ½ × keliling × jari-jari.

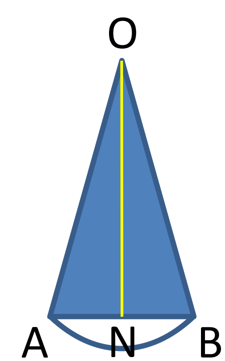




en.wikipedia.org

Archimedes & Lingkaran

Buktinya sbb: Andaikan luas lingkaran = $L > T$ = ½ × keliling × jari-jari. Pilih bil n sedemikian shg $T <$ luas segi-2^n $< L$. Misal AB sisi segi-2^n. Pada segitiga OAB, ruas garis ON tegak lurus thd AB. Di sini, $|ON| <$ jari-jari. Jadi,



$$\begin{aligned} \text{Luas segi-}2^n &= 2^n \times (\tfrac{1}{2}|AB| \times |ON|) \\ &= \tfrac{1}{2} \times (2^n|AB| \times |ON|) \\ &< \tfrac{1}{2} \times \text{keliling} \times \text{jari-jari} = T. \end{aligned}$$

Kontradiksi. Dgn cara yg sama, mustahil $L < T$. Jadi mestilah $L = T$.

Archimedes & Lingkaran

- Berdasarkan temuan sebelumnya, jika K = keliling lingkaran berdiameter 1, maka luasnya sama dengan $K/4$.
- Sekarang misal L = luas lingkaran berjari-jari r. Maka, berdasarkan temuan Antiphon dan Eudoxus:

$$\frac{L}{K/4} = \frac{(2r)^2}{1^2}.$$

- Akibatnya, $L = Kr^2$.

The Problem is …

- Berapa nilai K tersebut?

- K = keliling lingkaran berdiameter 1 = Π (= $\frac{1}{2}\tau$).

  [Catatan: Lambang Π pertama kali dipakai untuk menyatakan keliling lingkaran berdiameter 1 oleh William Jones pada tahun 1706.]

- Sebelumnya, Π ditaksir dengan 3, $3\frac{1}{8}$, dan 3,16.

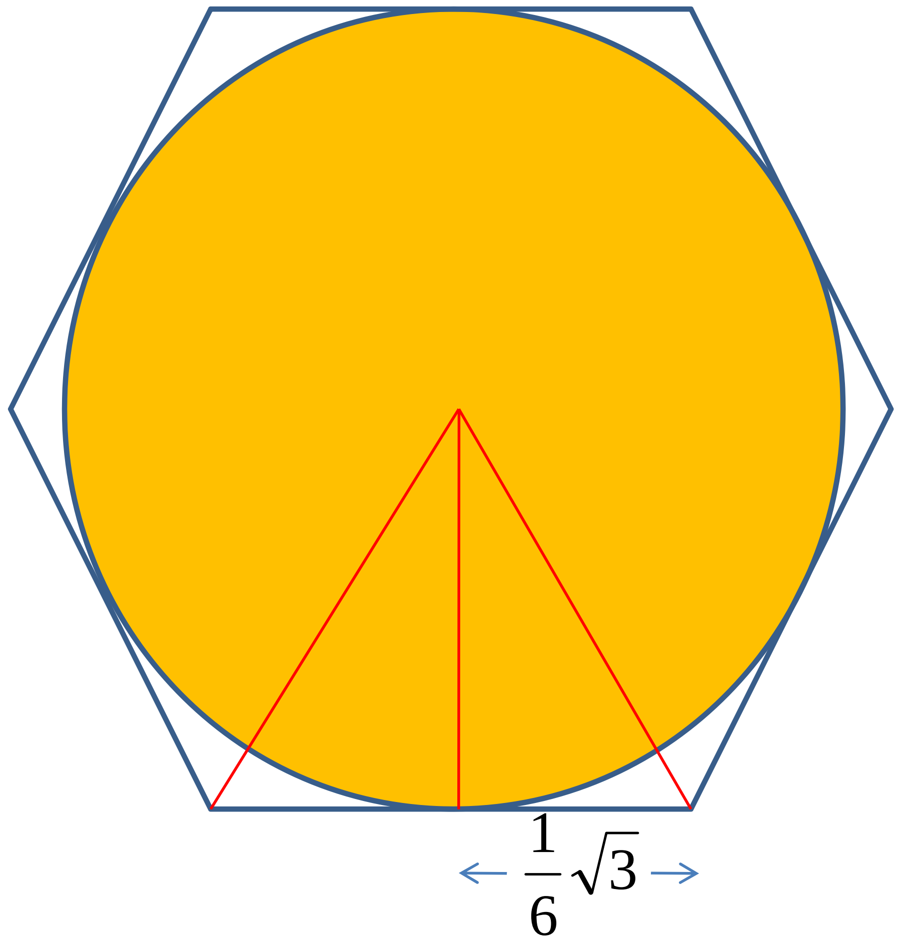
Taksiran Archimedes

- Menggunakan segi-96 beraturan, Archimedes memperoleh aproksimasi $\Pi \approx 22/7 = \overline{\kappa\beta}$ ‘ $\overline{\zeta}$.

- Bagaimana persisnya ia mendapatkan hasil tersebut?

- Mulai dengan segi-6 beraturan “yang memuat lingkaran”: $\Pi < 2\sqrt{3} \approx 530/153$.

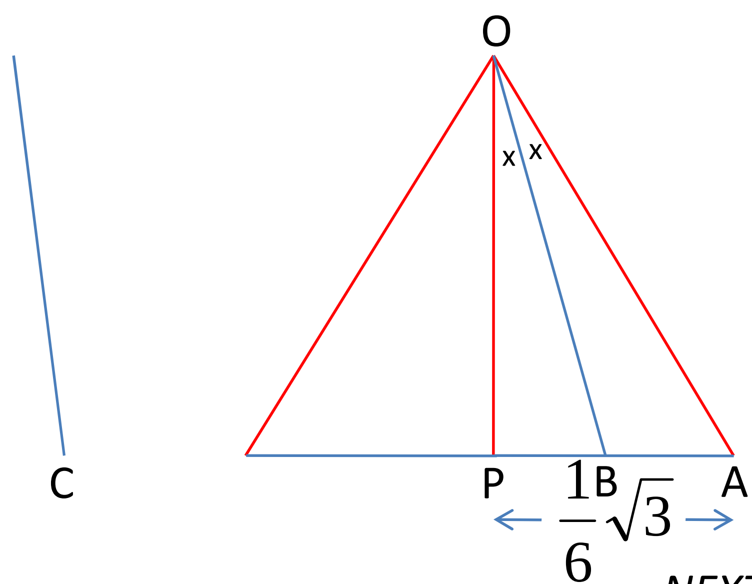
Lingkaran & Segi-6 Beraturan



Π < 2√3

Memperhalus Taksiran

HARDCOPY SLIDE INI TAMPAK ANEH KARENA BANYAK ANIMASI



OA : OP = AB : BP

OP : AP = √3 > 265 : 153 $(2x = 30^{o})$

OA : AP = 2 = 306 : 153

(OA+OP) : OP = (AB+BP) : BP

(OA+OP) : OP = AP : BP

(OA+OP) : AP = OP : BP

OP : BP > 571 : 153

NEXT, $OB^2 : BP^2 = (OP^2 + BP^2) : BP^2$

$> 349.450 : 23.409$

JADI, OB : BP > $591\frac{1}{8}$:153

DENGAN CARA YG SAMA, DIPEROLEH

OP : CP > $1162\frac{1}{8}$: 153

Memperhalus Taksiran

- Melanjutkan proses serupa, diperoleh

  $OC : CP > 1172\frac{1}{8} : 153$

  $OP : PD > 2334\frac{1}{4} : 153$

  $OD : DP > 2339\frac{1}{4} : 153$

  $OP : PE > 4673\frac{1}{2} : 153$
- PE = setengah panjang sisi segi-96
- $PE = 1/192 \times$ keliling segi-96
- $\Pi <$ keliling segi-96 : diameter $= 192\ PE : 2\ OP$
- $\Pi < 96 \times 153 : 4673\frac{1}{2} = 3 + 667\frac{1}{2} : 4673\frac{1}{2} = 3\frac{1}{7}$.

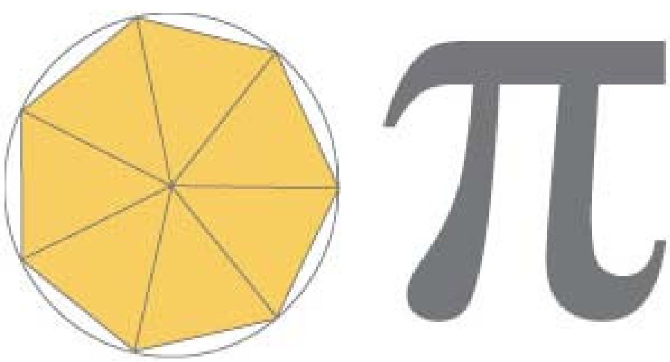
22/7 sebagai Aproksimasi Π

- Dengan menggunakan segi-96 "di dalam lingkaran", Archimedes juga memperoleh taksiran $\Pi > 3\frac{10}{71}$.
- Jadi, $3\frac{10}{71} < \Pi < 3\frac{1}{7}$, dan $\Pi \approx 3\frac{1}{7}$ merupakan aproksimasi yang baik, dgn kesalahan ~0,002.

http://80.53.150.234

REFLEKSI: *WHAT HAVE WE LEARNED*?

1. MATEMATIKA BUKAN HANYA KUMPULAN FAKTA; DI BALIK FAKTA TSB ADA PROSES & *ENGAGEMENT*.
2. DALAM PROSES TSB, MATEMATIKA BERTUMPU PADA PERNALARAN. (*Math is an art of reasoning!*)
3. …
4. …
5. …



Demikian,
Terima Kasih..

Rujukan

- W.S. Anglin (1994), *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer-Verlag
- **Archimedes (~235 SM)**, *Measurement of a Circle* [English Translation: T.L. Heath (ed.) (1953), *The Works of Archimedes*, Dover Edition]
- C. Lindsey (1997), *Archimedes' Approximation of Pi*, http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes.html