

BAB II

DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

A. OPERASI ELEMENTER TERHADAP BARIS DAN KOLOM SUATU MATRIKS

Matriks $A = (a_{ij})$ berdimensi $m \times n$ dapat dibentuk matriks baru dengan menggandakan perubahan bentuk baris dan/atau kolomnya dengan melakukan operasi elementer terhadap baris, disebut **operasi baris elementer (OBE)** dan/atau operasi elementer terhadap kolom, disebut **operasi kolom elementer (OKE)** dari matriks tersebut.

OBE dan OKE mempunyai tiga prinsip yaitu:

- Pertukaran
- Penggandaan
- Penggantian

Tabel 2.1 Simbol Operasi Elementer

Tipe	Operasi	Simbol
I	Menukar baris ke i dengan baris ke j dari matriks A	$B_{ij}(A)$
	Menukar kolom ke i dengan kolom ke j dari matriks A	$K_{ij}(A)$
II	Mengalikan baris ke i matriks A dengan skalar $k \neq 0$	$B_{i(k)}(A)$
	Mengalikan kolom ke i matriks A dengan skalar $k \neq 0$	$K_{i(k)}(A)$
III	Mengalikan baris ke j matriks A dengan skalar $k \neq 0$, dan hasilnya ditambahkan kepada baris ke i matriks A	$B_{ij(k)}(A)$
	Mengalikan kolom ke j matriks A dengan skalar $k \neq 0$, dan hasilnya ditambahkan kepada kolom ke i matriks A	$K_{ij(k)}(A)$

Contoh:

$$\text{Andaikan matriks } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Carilah: $B_{23}(A)$, $K_{1(-3)}(A)$, $B_{21(2)}(A)$, $K_{43}(A)$, $B_{3(-1)}(A)$, $K_{14(1)}(A)$

Solusi:

$$B_{23}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$K_{1(-3)}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -12 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_{21(2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 7 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K_{43}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_{3(-1)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$K_{14(1)}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Maple Code

```
with(LinearAlgebra) : with(MTM) : with(linalg) :  
with(Student[LinearAlgebra]) :
```

$$B := \text{Matrix}([[1, -2, 3, -1], [0, 2, 1, 1], [4, -3, -1, 5]])$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H_{23} := \text{SwapRow}(B, 2, 3)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{21(2)} := \text{AddRow}(B, 2, 1, 2)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 7 & -1 \\ 4 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$H_{3(-1)} := \text{MultiplyRow}(B, 3, -1)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

BENTUK ESELON BARIS TEREDUKSI

Suatu matriks untuk menjadi eselon baris tereduksi harus mempunyai sifat-sifat berikut ini:

1. Jika suatu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah sebuah angka 1. (kita sebut sebagai **utama 1**)
2. Jika ada sembarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama di bagian bawah matriks.
3. Jika sembarang dua baris yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas.
4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

Suatu matriks yang mempunyai sifat 1, 2, dan 3 disebut matriks **berbentuk eselon baris**.

Contoh

1. **Matriks eselon baris tereduksi**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Matriks eselon baris**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. DETERMINAN

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$. **Determinan** dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A . Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Beberapa metode untuk menghitung determinan adalah sebagai berikut:

- Metode Sarrus
- Ekspani Kofaktor

a. Metode Sarrus

Untuk pembahasan kali ini dikhususkan untuk matriks berukuran 2×2 dan 3×3 saja.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, maka:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

atau

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{dan}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} \end{aligned}$$

atau

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}$$

Contoh 2.1 :

Hitunglah determinan dari:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (1)(3) - (5)(1) \\ &= 3 - 5 \\ &= -2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(1)(1) + (3)(2)(5) + (5)(3)(3) - (5)(1)(5) - (1)(2)(3) - (3)(3)(1) \\ &= 1 + 30 + 45 - 25 - 6 - 9 \\ &= 36 \end{aligned}$$

b. Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan dari suatu matriks, terlebih dahulu harus diketahui **minor** dan **kofaktor**.

1. Definisi Minor

Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **minor anggota** a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matriks yang masih tersisa setelah baris ke- i dan kolom ke- j dihilangkan dari A .

2. Definisi Kofaktor

Jika A adalah suatu matriks persegi, maka **kofaktor anggota** a_{ij} dinyatakan oleh C_{ij} merupakan bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Contoh 2.2:

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (2)(1) = 10 - 2 = 8$$

dan

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 8 = (-1)(8) = -8$$

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[2, 1, -5], [2, 6, 2], [1, 4, 5]])$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$M_{12} := \text{Minor}(A, 1, 2)$

8

$C_{12} := (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$

-8

Perhatikan kembali matriks A dengan:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, maka

$$\text{Det}(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ingat bahwa:

$$C_{11} = (-1)^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32};$$

$$C_{12} = (-1)^3(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = (-1)(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = a_{23}a_{32} - a_{21}a_{33}; \text{ dan}$$

$$C_{13} = (-1)^4(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Sehingga

$$\text{Det}(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Dapat dilihat bahwa $\det(A)$ dapat ditentukan dengan cara mengalikan entri-entri yang ada di baris pertama A dengan **kofaktornya** kemudian menambahkan hasil kali yang didapatkan. Berdasarkan hal ini, perhitungan $\det(A)$ dilakukan dengan menggunakan **ekspansi kofaktor** sepanjang baris pertama A .

Contoh 2.3 :

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)((6)(5) - (2)(4)) = 30 - 8 = 22$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)((2)(5) - (2)(1)) = (-1)(10 - 2) = -8$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)((2)(4) - (6)(1)) = (8 - 6) = 2$$

Sehingga

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = (2)(22) + (1)(-8) + (-5)(2) = 44 - 8 - 10 = 26$$

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[2, 1, -5], [2, 6, 2], [1, 4, 5]])$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$M_{11} := \text{Minor}(A, 1, 1)$

22

$C_{11} := (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$

22

$M_{12} := \text{Minor}(A, 1, 2)$

8

$C_{12} := (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$

-8

$M_{13} := \text{Minor}(A, 1, 3)$

2

$C_{13} := (-1)^{1+3} \cdot M_{13}$

2

$\det A := (A(1, 1) \cdot C_{11}) + (A(1, 2) \cdot C_{12}) + (A(1, 3) \cdot C_{13})$

26

Teorema 2.1

Determinan suatu matriks $A_{n \times n}$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang didapatkan; yaitu, untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, berlaku:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke- i)

dan

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke- j)

Contoh 2.4:

Misalkan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, maka dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-1 diperoleh:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)((6)(5) - (2)(4)) = 30 - 8 = 22$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)((1)(5) - (-5)(4)) = (-1)(5 - (-20)) = -25$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1)((1)(2) - (-5)(6)) = (2 - (-30)) = 32$$

Sehingga:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} = (2)(22) + (2)(-25) + (1)(32) = 44 - 50 + 32 = 26$$

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[2, 1, -5], [2, 6, 2], [1, 4, 5]])$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$M_{11} := \text{Minor}(A, 1, 1)$

$$C_{11} := (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \quad 22$$

$$M_{21} := \text{Minor}(A, 2, 1) \quad 22$$

$$C_{21} := (-1)^{2+1} \cdot M_{21} \quad 25$$

$$M_{31} := \text{Minor}(A, 3, 1) \quad -25$$

$$C_{31} := (-1)^{3+1} \cdot M_{31} \quad 32$$

$$\det A := (A(1, 1) \cdot C_{11}) + (A(2, 1) \cdot C_{21}) + (A(3, 1) \cdot C_{31}) \quad 32$$

26

c. Menghitung Determinan dengan Penghilangan Baris

Teorema 2.2

Misalkan A adalah suatu baris persegi.

- Jika A memiliki sebuah baris nol atau sebuah kolom nol, maka $\det(A) = 0$
- $\det(A) = \det(A^T)$

1. Determinan Matriks Segitiga

Teorema 2.3

Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka $\det(A)$ adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya; yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$

Contoh 2.5:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (3)(-1)(5)(8)(2) = -240$$

Maple Code

```
A := Matrix([[3, 2, -1, 4, 7], [0, -1, 6, 2, 4], [0, 0, 5, 6, 5], [0, 0, 0, 8, 3], [0, 0, 0, 0, 2]])
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)$$

$$-240$$

$$A(1, 1) \cdot A(2, 2) \cdot A(3, 3) \cdot A(4, 4) \cdot A(5, 5)$$

$$-240$$

2. Pengaruh Operasi Baris Elementer pada Suatu Determinan

Teorema 2.4

- Jika B adalah suatu matriks yang dihasilkan jika suatu baris tunggal atau kolom tunggal dari A dikalikan dengan suatu scalar k , maka $\det(B) = k \det(A)$
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$
- Jika B adalah matriks yang dihasilkan jika suatu penggandaan suatu baris A ditambahkan baris lainnya atau jika suatu penggandaan suatu kolom ditambahkan pada kolom lainnya, maka $\det(B) = \det(A)$

Contoh :

$$a. \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Baris pertama A dikalikan dengan k

$$\det(B) = k \det(A)$$

$$b. \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan kedua dari A dipertukarkan

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$c. \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Suatu penggandaan baris kedua dari A ditambahkan pada baris pertama

$$\det(B) = \det(A)$$

Contoh 2.6

Tinjaulah matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan metode yang digunakan seperti contoh 2.1 diperoleh $\det(A) = -15, \det(A_1) = -45, \det(A_2) = 15, \det(A_3) = -15$

Perhatikan bahwa A_1 diperoleh dengan mengalikan baris pertama A dengan 3, A_2 diperoleh dengan mempertukarkan baris kedua dan ketiga dari A , dan A_3 diperoleh dengan menambahkan -6 kali baris pertama A pada baris ketiga. Berdasarkan teorema, diperoleh hubungan

$$\det(A_1) = 3 \det(A) = 3(-15) = -45,$$

$$\det(A_2) = -\det(A) = -(-15) = 15, \text{ dan}$$

$$\det(A_3) = \det(A) = -15$$

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[1, 2, 3], [0, 4, 5], [6, 7, 8]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$A1 := \text{MultiplyRow}(A, 1, 3)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$A2 := \text{SwapRow}(A, 2, 3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$A3 := \text{AddRow}(A, 3, 1, -6)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

$\det(A)$

-15

$\det(A1)$

-45

$3 \cdot \det(A)$

-45

$\det(A2)$

15

$-\det(A)$

15

$$\det(A3)$$

$$-15$$

$$\det(A)$$

$$-15$$

Teorema 2.5

Misalkan E adalah suatu matriks elementer $n \times n$.

- Jika E dihasilkan dari mengalikan suatu baris dari I_n dengan k , maka $\det(E) = k$
- Jika E dihasilkan dari mempertukarkan dua baris dari I_n , maka $\det(E) = -1$
- Jika E dihasilkan dari menambahkan suatu penggandaan satu baris I_n ke baris lainnya, maka $\det(E) = 1$

Contoh 2.7 :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Baris kedua I_4 dikalikan dengan 4

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Baris kedua dan ketiga dari I_4 dipertukarkan

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Menambahkan 7 kali baris keempat dari I_4 dengan baris pertama

Maple Code

$Ide := \text{Matrix}([[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E1 := \text{MultiplyRow}(Ide, 2, 4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E2 := \text{SwapRow}(Ide, 2, 3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E3 := \text{AddRow}(Ide, 1, 4, 7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(E1)$$

$$4$$

$$4 \cdot \det(Ide)$$

$$4$$

$$\det(E2)$$

$$-1$$

$$-\det(Ide)$$

$$-1$$

$$\det(E3)$$

$$1$$

$$\det(Ide)$$

$$1$$

3. Menghitung Determinan Dengan Reduksi Baris

Dengan adanya pengaruh operasi baris elementer terhadap determinan, maka kita dapat menghitung determinan dengan perhitungan yang jauh lebih sedikit jika dibandingkan dengan menghitung determinan melalui definisi determinan. Gagasannya adalah mereduksi matriks yang diberikan menjadi matriks segitiga atas melalui operasi baris elementer, kemudian menghitung matriks segitiga atas tersebut dan menghubungkan determinan tersebut dengan determinan matriks aslinya.

Contoh 2.8:

Hitunglah $\det(A)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks A direduksi menjadi matriks eselon baris (segitiga atas) dan menerapkan teorema

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Baris pertama dan kedua dari matriks A dipertukarkan

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -13 & -14 \end{vmatrix}$$

-2 kali baris pertama ditambahkan ke baris kedua

-5 kali baris pertama ditambahkan ke baris ketiga

$$= -(-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & -14 \end{vmatrix}$$

Suatu faktor bersama yaitu -5 dari baris kedua dikeluarkan melalui tanda determinan

$$= -(-5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

13 kali baris kedua ditambahkan ke baris ketiga

$$= -(-5)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Suatu faktor bersama yaitu -1 dari baris ketiga dikeluarkan melalui tanda determinan

$$= -(-5)(-1)(1) = 5$$

Teorema 2.6

Jika A suatu matriks persegi dengan dua baris proporsional, maka $\det(A) = 0$

Contoh 2.9:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Hitunglah nilai determinan dari matriks A

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

-3 kali baris pertama ditambahkan ke baris kedua

Contoh matriks proporsional :

Matriks-matriks berikut memiliki dua baris yang proporsional sehingga memiliki nilai determinan nol.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ 9 & 0 & 12 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Sifat-sifat Fungsi Determinan

Misalkan A dan B adalah matriks persegi $n \times n$ dan k adalah skalar sebarang. Akan dicari hubungan yang mungkin diantara matriks $\det(A)$ dan $\det(B)$ dengan

$$\det(kA), \quad \det(A + B), \quad \text{dan} \quad \det(AB)$$

Misalkan A adalah sebarang matriks persegi $n \times n$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{maka} \quad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sehingga } \det(kA) = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (k)(k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (k)(k)(k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix}$$

$= \dots$

$$= (k)(k)(k) \cdots (k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= k^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n \det(A)$$

Jadi, Jika A adalah sebarang matriks persegi $n \times n$, maka $\det(kA) = k^n \det(A)$

Contoh 2.10

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ maka $4A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$.

Dengan menggunakan perhitungan langsung, diperoleh bahwa $\det(A) = -4$ dan $\det(4A) = -64$. Hal ini sesuai dengan hubungan $\det(4A) = 4^2 \det(A) = (16)(-4) = -64$

Misalkan A dan B adalah sebarang matriks persegi dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ maka } A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ dimana}$$

$\det(A) = -4$, $\det(B) = 3$, dan $\det(A + B) = 5$ sehingga

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Teorema 2.7

Misalkan A, B , dan C adalah matriks-matriks $n \times n$ yang berbeda hanya pada satu baris, misalnya baris ke- r , dan asumsikan bahwa baris ke- r dari C dapat diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian pada baris ke- r dari A dan B . Maka

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

Contoh 2.11

Diketahui

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan menghitung determinan, dapat dihitung bahwa $\det(A) = -2$, $\det(B) = 5$, dan $\det(C) = 3$ sehingga

$$\det(C) = \det(A) + \det(B)$$

Teorema 2.8

Jika A dan B adalah matriks-matriks persegi dengan ukuran sama, maka

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Contoh 2.12

Misalkan matriks-matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Kita peroleh $\det(A) \cdot \det(B) = (-4)(3) = -12$. Dengan perhitungan langsung diperoleh $\det(AB) = -12$, sehingga $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Teorema 2.9

Suatu matriks persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$

Contoh 2.13:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$. Karena baris pertama dan baris ketiga proporsional, maka $\det(A) = 0$. Jadi, A tidak dapat dibalik.

Akibat 2.1

Jika A dapat dibalik, maka

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Contoh 2.14 :

Dengan menggunakan matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, maka $\det(A) = -4$. Jadi, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

C. INVERS MATRIKS

1. Metode Untuk Mencari A^{-1} Melalui Matriks Elementer

Definisi 2.1

Suatu matriks $n \times n$ disebut **matriks elementer** E jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan (identitas) $n \times n$ yaitu I_n dengan melakukan operasi baris elementer tunggal.

Contoh 2.15 :

Berikut contoh **matriks elementer** dan operasi-operasi yang menghasilkannya.

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Baris pertama I_2 dikalikan dengan 2

$$\text{ii.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baris pertama dan ketiga dari I_4 dipertukarkan

$$\text{iii.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5 kali baris ketiga I_3 ditambahkan dengan baris kedua

$$\text{iv.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baris kedua I_3 dikalikan dengan 1

Jika matriks elementer E dikalikan dengan matriks-matriks elementer E maka efeknya adalah untuk memperagakan operasi baris elementer pada A .

Teorema 2.10

Jika matriks elementer E dihasilkan dengan melakukan sebuah operasi baris tertentu pada I_m dan jika A adalah matriks $m \times n$, maka hasil kali EA adalah matriks yang dihasilkan bila operasi baris yang sama ini dilakukan pada A .

Contoh 2.16:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dan matriks elementer $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ yang dihasilkan

oleh penambahan 2 kali baris ketiga dari I_3 ke baris kedua. Hasil kali EA adalah

$EA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ yang sama persis dengan matriks yang dihasilkan apabila kita

menambahkan 2 kali baris ketiga dari A ke baris kedua.

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[1, -2, 2, 2], [2, 0, 1, 3], [-1, 1, 2, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$E := \text{Matrix}([[1, 0, 0], [0, 1, 2], [0, 0, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{MatrixMatrixMultiply}(E, A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$A_{\text{new}} := \text{AddRow}(A, 2, 3, 2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika operasi baris elementer diterapkan pada matriks satuan/identitas I untuk menghasilkan matriks elementer E , maka terdapat operasi baris kedua yang apabila diterapkan pada matriks elementer E akan menghasilkan kembali matriks satuan/identitas I . Misalkan jika E kita peroleh dengan mengalikan baris ke $-i$ dari I dengan konstanta $c \neq 0$, maka I dapat ditemukan kembali jika baris ke $-i$ dari E dikalikan dengan $\frac{1}{c}$.

Tabel 2.2 Operasi Baris Elementer yang Mengubah Matriks Elementer Menjadi Matriks Satuan/Identitas, dan sebaliknya

Operasi Baris pada I yang menghasilkan E	Operasi Baris pada E yang menghasilkan I
Mengalikan baris ke $-i$ dengan konstanta $c \neq 0$	Mengalikan baris ke $-i$ dengan konstanta $\frac{1}{c}$
Menukar baris ke $-i$ dengan baris ke $-j$	Menukar baris ke $-i$ dengan baris ke $-j$
Menambahkan k kali baris ke $-i$ dengan baris ke $-j$	Menambahkan $-k$ kali baris ke $-i$ dengan baris ke $-j$

Contoh 2.17 :

Berdasarkan Contoh 2.16 untuk menjadikan matriks satuan/identitas, maka operasi yang dilakukan terhadap matriks elementer

i. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Baris pertama E dikalikan dengan $\frac{1}{2}$

$$\text{ii. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Baris pertama dan ketiga dari E dipertukarkan

$$\text{iii. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-5 kali baris ketiga E ditambahkan dengan baris kedua

Teorema 2.11

Setiap matriks elementer dapat dibalik, dan inversnya juga matriks elementer

Jika A matriks persegi $n \times n$ dan matriks A tersebut ekuivalen baris dengan matriks satuan I_n maka dapat ditemukan m matriks elementer yang sedemikian rupa sehingga jika dikalikan dengan matriks A maka matriks A tersebut menjadi matriks satuan, sehingga

$$E_m \cdots E_2 E_1 A = I_n$$

Karena matriks elementer mempunyai invers, maka kalikan dengan invers masing-masing matriks elementer dan diperoleh

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} E_m \cdots E_2 E_1 A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} I_n$$

atau

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1} I_n$$

Persamaan di atas memperlihatkan bahwa A mempunyai invers. Karena A memiliki invers, maka

$$A^{-1} A = I$$

dengan

$$A^{-1} = E_m \cdots E_2 E_1 I_n$$

Karena matriks invers tunggal, maka (jika A memiliki invers) matriks A ekuivalen baris dengan matriks satuan I .

$$(A | I) \xrightarrow{OBE} (I | A^{-1})$$

Berdasarkan hal di atas, cara mudah untuk menentukan invers dari suatu matriks persegi adalah dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer secara bersamaan antara matriks A dengan matriks

satuan I dengan target mengubah matriks A menjadi matriks satuan I dan akibatnya diperoleh perubahan matriks I menjadi matriks A^{-1} . Jika A tidak dapat berubah menjadi matriks satuan, berarti **A tidak memiliki invers.**

Contoh 2.18:

Tentukan matriks invers (jika ada) dari

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3b_1+b_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}b_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{-2b_2+b_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array} \right)$$

$$\text{Jadi, } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Maple Code

$A := \text{matrix}([[1, 2], [3, -1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$Idt := \text{matrix}([[1, 0], [0, 1]])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Be := (\langle A|Idt \rangle)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_{21(-3)} := \text{AddRow}(Be, 2, 1, -3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$H_2\left(-\frac{1}{7}\right) := \text{MultiplyRow}\left(H_{21(-3)}, 2, -\frac{1}{7}\right)$

$$H_{12(-2)} := AddRow\left(H_2\left(-\frac{1}{7}\right), 1, 2, -2\right)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$inverse(A)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\left(B|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{-b_1+b_2}{\sim}\overset{-b_1+b_2}{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)}\overset{-3b_3+b_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\overset{-3b_2+b_1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Jadi, } B^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Maple Code

$$B:=matrix([\left[1,3,3\right],\left[1,4,3\right],\left[1,3,4\right]])$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$Idt:=matrix([\left[1,0,0\right],\left[0,1,0\right],\left[0,0,1\right]])$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Bnew:=\left(\langle B|Idt\rangle\right)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$H_{21(-2)} := AddRow(Bnew, 2, 1,-1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{31(-1)} := \text{AddRow}(H_{21(-2)}, 3, 1, -1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{13(-3)} := \text{AddRow}(H_{31(-1)}, 1, 3, -3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{12(-3)} := \text{AddRow}(H_{13(-3)}, 1, 2, -3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{inv}B := \text{inverse}(B)$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[b_1+b_2]{-2b_1+b_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{b_2+b_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Karena tidak didapatkan matriks satuan, maka C tidak memiliki invers.

Maple Code

$$C := \text{matrix}([[1, 6, 4], [2, 4, -1], [-1, 2, 5]])$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Idt := \text{matrix}([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cnew := ((C|Idt))$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{21(-2)} := \text{AddRow}(C_{\text{new}}, 2, 1, -2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{31(1)} := \text{AddRow}(H_{21(-2)}, 3, 1, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_{32(1)} := \text{AddRow}(H_{31(1)}, 3, 2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{inverse}(C)$

Error, (in linalg:-inverse) singular matrix

2. Metode untuk Mencari A^{-1} Melalui Matriks Adjoin

Definisi 2.2 Matriks Kofaktor dan Adjoin dari A

Jika A sebarang matriks persegi $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij} maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

merupakan **matriks kofaktor** A. Transpose matriks ini dinamakan **adjoin** A yang ditulis dengan $\text{adj}(A)$

Contoh 2.19:

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ carilah invers dari matriks A!

Penyelesaian

Kofaktor dari matriks a_{ij} atau C_{ij} , yaitu:

$$C_{11} = M_{11} = d$$

$$C_{12} = -M_{12} = -c$$

$$C_{21} = -M_{21} = -b$$

$$C_{22} = M_{22} = a$$

sehingga matriks kofaktor C adalah

$$C = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Maple Code

$A := \text{Matrix}([[a, b], [c, d]])$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$M_{11} := \text{Minor}(A, 1, 1)$

$$d$$

$C11 := (-1)^{1+1} \cdot M_{11}$

$$d$$

$M_{12} := \text{Minor}(A, 1, 2)$

$$c$$

$C12 := (-1)^{1+2} \cdot M_{12}$

$$-c$$

$M_{21} := \text{Minor}(A, 2, 1)$

$$b$$

$C21 := (-1)^{2+1} \cdot M_{21}$

$$-b$$

$M_{22} := \text{Minor}(A, 2, 2)$

$$a$$

$C22 := (-1)^{2+2} \cdot M_{22}$

$$a$$

$C := \text{Matrix}([[C11, C12], [C21, C22]])$

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Dari pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa jika matriks persegi $A = (a_{ij})$ berdimensi n adalah invertible (non singular) maka ada matriks A^{-1} (matriks invers A) sehingga berlaku hubungan:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Untuk setiap matriks persegi $A = (a_{ij})$ berdimensi n , ada adjoint matriks A . Adjoint matriks (adj) merupakan transpose dari matriks kofaktor. Adjoint matriks A ditulis dengan $\text{adj } A$ sedemikian hingga berlaku hubungan:

$$A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = |A| I$$

atau

$$A \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{\text{adj} A}{|A|} A = I$$

Dengan $|A| \neq 0$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|}; \text{ dengan } |A| \neq 0$$

Dengan demikian jelas bahwa suatu matriks persegi akan mempunyai invers jika determinan dari matriks tersebut tidak sama dengan nol, atau dengan kata lain matriks tersebut non singular.

Contoh 2.20:

Dengan menggunakan contoh 2.19

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Jadi, } A^{-1} = \frac{\text{adj} A}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{adj} A := \text{transpose}(C)$$

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{inv} A := \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj} A$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

$$\text{inverse}(A)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

LATIHAN SOAL!

1. Hitunglah nilai determinan dari matriks persegi dimensi 3 berikut:

a. $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b. $D = \begin{pmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix}$

2. Berapakah nilai x jika:

a. $\begin{vmatrix} x-5 & -1 \\ 7 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

b. $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$

3. Andaikan $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dan $B = I_2$. Tunjukkan bahwa:

$\det(A+B) = \det A + \det B$ jika dan hanya jika $a+d = 0$.

4. Hitunglah determinan berikut ini dengan ekspansi minor dan kofaktor:

a. $A = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{c. } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Carilah invers dari matriks berikut ini, jika matriksnya invertible:

$$\text{a. } C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$