

Pokok Bahasan : Perhitungan Peluang: Peluang bersyarat, Peluang Dua Peristiwa yang Saling Bebas, Dalil Bayes

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

A. Peluang Bersyarat

Definisi:

Jika A dan B adalah dua buah peristiwa dalam ruang sampel S dan $P(A) \neq 0$, maka peluang bersyarat dari B diberikan A didefinisikan sebagai :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ atau } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} :$$

Dalil:

Jika A_1, A_2 dan A_3 adalah tiga buah peristiwa dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $P(A) \neq 0$ dan $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 0$, maka:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$$

Jika A_1, A_2, A_3 dan A_4 adalah empat buah peristiwa dalam ruang sampel S sedemikian sehingga $P(A) \neq 0$ dan $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \neq 0$, maka:

.....

Untuk m buah peristiwa $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$:

.....

B. Peluang Dua Peristiwa yang Saling Bebas

Definisi 1:

Dua peristiwa A dan B dikatakan peristiwa yang saling bebas, jika dan hanya jika:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Definisi 2:

Tiga buah peristiwa A, B dan C dikatakan saling bebas, jika dan hanya jika dipenuhi persyaratan sebagai berikut:

1. Peristiwa yang berpasangan bebas, yaitu:

- a. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- b. $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- c. $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- 2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

C. Dalil Bayes

Definisi 1: Partisi

Peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dikatakan partisi dari ruang sampel S , jika :

- a. $B_i \cap B_j = \emptyset$, untuk semua $i \neq j$

$$\left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right) = S$$

- b. $P(B_i) > 0$, untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots, k$

Definisi 2: Total Peluang

Jika peristiwa-peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ dikatakan partisi dari ruang sampel S , maka peluang dari peristiwa A yang sembarang dari S adalah :

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \dots + P(B_k \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Definisi 3: Aturan Bayes

Jika peristiwa $B_1, B_2, B_3, \dots, B_k$ merupakan partisi dari ruang sampel S sedemikian sehingga $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$, maka untuk peristiwa A sembarang dari S sedemikian hingga $P(A) > 0$, berlaku :

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^k P(B_i) P(A|B_i)}$$

Soal-soal

1. Sebuah dadu bermata enam dilempar. Apabila A adalah kejadian muncul mata dadu bilangan genap dan B adalah kejadian muncul mata dadu bil prima, maka tentukan apakah A dan B saling lepas ?

Penyelesaian:

2. Sebuah tas berisi 10 bola hitam dan 6 bola putih. Diambil secara acak dua kali berturut-turut masing-masing satu bola, tanpa pengembalian. Berapa peluang mendapatkan kedua bola putih ?

Penyelesaian:

3. Sebuah dadu dilemparkan sekali, berapa peluang muncul mata dadu :

- a. Kurang dari 3 atau lebih dari 5 ?
- b. Ganjil atau prima ?

4. Misalkan kita melakukan pengundian sebuah dadu. Jika :

B_1 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling banyak 2,

B_2 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu paling sedikit 3 dan paling banyak 5,

B_3 adalah peristiwa munculnya angka mata dadu yang tertinggi,

Coba selidiki apakah peristiwa B_1 , B_2 dan B_3 merupakan partisi ruang sampel S ?

5. Kotak A berisi 2 bola hitam dan 3 bola putih.

Kotak B berisi 4 bola hitam dan 1 bola putih.

Kotak C berisi 3 bola hitam dan 4 bola putih.

Kemudian sebuah kotak dipilih secara acak dan sebuah bola diambil dari kotak yang terpilih itu.

- a. Berapa peluang bahwa bola yang terambil itu berwarna putih?
- b. Jika bola yang terambil itu berwarna putih, maka hitung peluang bahwa bola itu berasal dari kotak A? Kotak B? Kotak C?