

HANDOUT PERKULIAHAN

Pertemuan Ke : 4

Pokok Bahasan : Distribusi Satu Peubah Acak dan Ekspektasi Satu Peubah Acak

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

A. Peubah Acak

Definisi 1 : Peubah Acak

Misalkan E adalah suatu eksperimen dengan ruang sampelnya S . Sebuah fungsi X yang memetakan setiap elemen atau anggota $s \in S$ dengan sebuah bilangan real $X(s)$ dinamakan peubah acak.

Contoh 1 :

Misalkan kita melakukan eksperimen E dengan pengundian dua uang koin sekaligus. Misalkan X adalah banyaknya “angka Rp.100” yang muncul dari dua koin tersebut.

Maka ruang sampelnya adalah $S = \{AA, AG, GA, GG\}$

R_x = Nilai-nilai yang mungkin dari $X = \{0,1,2\}$

$X(AA) = 2, X(AG) = 1, X(GA) = 1, X(GG) = 0$

Definisi 2 : Peubah Acak Diskrit

*Misalkan X adalah peubah acak. Jika banyaknya nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu, daerah hasil) adalah terhingga (yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$) atau tak terhingga tapi dapat dihitung (yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$) maka X dinamakan **peubah acak diskrit**.*

Contoh 2:

Dalam contoh di atas X adalah banyaknya muncul “angka Rp.100”, maka dalam hal ini X merupakan peubah acak diskrit karena daerah hasilnya (R_x) merupakan nilai-nilai yang banyaknya terhingga yaitu (0, 1, 2).

Definisi 3 : Peubah Acak Kontinu

Misalkan X adalah peubah acak. Jika nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu ruang hasil R_x) merupakan sebuah interval pada garis bilangan real, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

Contoh 3:

Misalkan mahasiswa STKIP berjumlah 25000 orang dan para mahasiswa tersebut diberi nomor induk mahasiswa mulai dari 00001 sampai 25000. Kemudian seorang mahasiswa dipilih secara acak dan ia diukur berat badannya. Dalam hal ini, ruang sampelnya adalah :

$S = \{s: s = 00001, 00002, 00003, \dots, 25000\}$

Misal X menunjukkan berat badan dari mahasiswa yang terpilih, maka ia bisa ditulis sebagai : $X(s)$, dengan $s \in S$. Diasumsikan bahwa tidak mahasiswa yang berat kurang dari 20 kg atau lebih dari 175 kg, sehingga ruang hasil dari X adalah :

$$R_x = \{x: 20 \leq x \leq 175\}$$

Karena R_x merupakan sebuah interval, maka X termasuk ke dalam peubah acak kontinu.

B. Distribusi Peluang

Definisi 1 : Fungsi **Peluang**

Misalkan x adalah peubah acak diskrit dengan nilai-nilai yang mungkin adalah $x_1, x_2, x_3, \dots$ kemudian disusun menurut urutan dari terkecil sampai terbesar. Nilai-nilai tersebut mempunyai peluang masing-masing $P(X=x_i) = p(x_i)$, untuk $i = 1, 2, 3, \dots$. Bilangan $p(x_i)$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots$ dinamakan peluang dari x_i dan harus memenuhi syarat-syarat berikut :

- a. $p(x_i) \geq 0$ untuk semua i
- b.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

- c. $P(X=x) = p(x) = f(x)$

Fungsi p yang didefinisikan dinamakan **fungsi peluang** dari peubah acak X . Kumpulan dari pasangan $(x_i, p(x_i))$, $i=1, 2, 3, \dots$ kadang-kadang dinamakan **distribusi peluang** dari X .

Definisi 2: **Fungsi Densitas**

Misalkan X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X , jika nilai-nilainya, yaitu $f(x)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

- a. $f(x_i) \geq 0$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$
- b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
- c. Untuk setiap a dan b , dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Jika X adalah peubah acak kontinu serta a dan b adalah dua konstanta real, dengan $a < b$, maka:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

C. Fungsi Distribusi

Definisi 1 : Fungsi Distribusi Kumulatif

Misalkan X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kita mendefinisikan F sebagai fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak X , dengan: $F(x) = P(X \leq x)$

Definisi 2: Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit

Misalkan X adalah peubah acak diskrit, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t), \text{ untuk } -\infty < x < \infty$$

dengan $p(t)$ adalah fungsi peluang dari X di

Jika banyak nilai-nilai dari X adalah terhingga, yaitu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; maka fungsi distribusinya diberikan dengan :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < x < x_1 \\ p(x_1) & ; x_1 \leq x < x_2 \\ p(x_1) + p(x_2) & ; x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) & ; x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

Nilai $F(x)$ yaitu fungsi distribusi dari peubah acak diskrit X memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- Jika $a \leq b$, maka $F(a) \leq F(b)$ untuk setiap bilangan real a dan b

Definisi 3: Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Misalkan X adalah peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

dengan $f(t)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di t

Penghitungan peluang dari peubah acak yang mempunyai nilai dalam interval dapat dilakukan berdasarkan fungsi peluang atau fungsi densitas. Baik peubah acak diskrit maupun kontinu bisa menggunakan rumus:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a), \text{ dengan } a, b \in \text{Real dan } a < b$$

Peubah acak yang berharga satu nilai menggunakan rumus:

$$P(X = b) = F_x(b) - F_x(b-)$$

Contoh :

1. Dilakukan pengundian dua buah mata uang Rp.100 yang seimbang sekaligus. Jika peubah acak X menunjukkan banyak Gambar yang muncul, maka tentukan distribusi peluang dan fungsi distribusi dari X !

2. Misalkan fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$$f(x) = (3/8)x^2 ; 0 < x < 2$$

$$= 0 ; x \text{ lainnya}$$

Tentukan fungsi distribusi $F(x)$

Pokok Bahasan : Ekspektasi Satu Peubah Acak Diskrit

URAIAN POKOK PERKULIAHAN

A. Nilai Ekspektasi

Definisi:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluangnya di x adalah $p(x)$ dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka nilai ekspektasi dari $u(X)$, dinotasikan dengan $E[u(x)]$, didefinisikan sebagai:

$$E[u(x)] = \sum_x u(x) \cdot p(x)$$

Contoh 1:

Misalkan fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

$$p(x) = x/15 ; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$

Sifat-sifat Nilai Ekspektasi:

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka $E(c) = c$
2. Jika c adalah sebuah konstanta dan $u(X)$ adalah fungsi dari X , maka: $E[c \cdot u(X)] = c \cdot E[u(X)]$
3. Jika c_1 dan c_2 adalah dua buah konstanta dan $u_1(X)$ dan $u_2(X)$ adalah dua buah fungsi dari X , maka:

$$E[c_1 \cdot u_1(X) + c_2 \cdot u_2(X)] = c_1 \cdot E[u_1(X)] + c_2 \cdot E[u_2(X)]$$

Contoh 2:

Lihat kembali soal pada contoh 1

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$ dengan menggunakan sifat-sifat nilai ekspektasi

B. Rataan

Definisi:

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah $p(x)$, maka rata-rata dari peubah acak X didefinisikan sebagai:

$$E(x) = \sum_x x \cdot p(x)$$

Contoh:

Jika Sandi mengundi sebuah dadu seimbang, maka tentukan rata-rata dari munculnya angka pada mata dadu itu!

C. Varians

Definisi 1: Varians

Misalnya X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(X) = E[X - E(X)]^2$$

atau $\text{Var}(X) = E(X - \mu)^2$

Definisi 2: Varians Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka Varians dari X didefinisikan sebagai:

$$\text{Var}(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot p(x)$$

Sifat-sifat Varians :

1. Jika c adalah sebuah konstanta, maka $\text{Var}(c) = 0$
2. Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:
$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$$
3. Jika a dan b adalah dua buah konstanta dan X adalah peubah acak, maka:
$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Contoh:

Misalnya distribusi peluang dari peubah acak X adalah sebagai berikut:

x	1	2	3
$p(x)$	1/2	1/3	1/6

Hitung $\text{Var}(X)$!

D. Momen

Definisi 1: Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen ke- k (dinotasikan dengan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = E(X^k), k = 1, 2, 3, \dots$$

Definisi 2: Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka momen ke- k (dinotasikan μ'_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu'_k = \sum_x x^k \cdot p(x)$$

Definisi 3: Momen Sekitar Rataan Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x , maka momen sekitar rata-rata ke- k (dinotasikan μ_k) didefinisikan sebagai:

$$\mu_k = \sum_x (x - \mu)^k \cdot p(x)$$

Contoh:

1. Berikut ini diberikan distribusi peluang dari peubah acak X

x	1	2	3
$p(x)$	1/2	1/3	1/6

Hitunglah nilai μ'_3

2. Misalkan fungsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x) = 1/3 ; x = 1, 2, 3$$

Hitung μ_3 !

E. Fungsi Pembangkit Momen

Definisi 1: Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) ,$$

untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$

Definisi 2: Fungsi Pembangkit Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah fungsi peluang dari X di x , maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx} \cdot p(x)$$

Penurunan Momen dari Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu dan $M_x(t)$ adalah fungsi pembangkit momennya, maka $M'_x(t)]_{t=0} = \mu'_r$

Contoh:

Misalkan fungsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x) = \frac{1}{4} \binom{2}{x}; x = 0, 1, 2$$

- a. Tentukan fungsi pembangkit momen dari X
- b. Hitung μ'_1 dan μ'_2 berdasarkan hasil fungsi pembangkit momen