

iberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah limitnya

$$x_1 > 1 \rightarrow \frac{1}{x_1} < 1 \rightarrow -\frac{1}{x_1} > -1$$

$$\rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{x_1} > 2 - \frac{1}{1} = 1$$

$$x_3 = 2 - \frac{1}{x_2} > 1$$

$$x_4 = 2 - \frac{1}{x_3} > 1$$

...

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 1$$

batas bawah $x_1 = 1$ (supremum)

tidak ada batas atas $\rightarrow x_1 = \infty$

$$\rightarrow x_2 = 2 - \frac{1}{\infty} = 2$$

$$x_3 = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\infty}} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2 - \frac{1}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x_5 = 2 - \frac{1}{x_4} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

...

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

$$1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

$\nwarrow$ batas atas $\nearrow$ batas bawah

$$\lim(x_n) = \sup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 2$$

$$\lim(x_n) = \inf \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$$

Diberikan $x_1 \geq 2$ dan $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) turun dan terbatas ke bawah oleh 2. Carilah nilai limitnya.

$$x_2 = 1 + \sqrt{x_1 - 1} = 1 + (x_1 - 1)^{1/2}$$

$$x_3 = 1 + \sqrt{x_2 - 1} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{x_1 - 1} - 1} = 1 + \sqrt{\sqrt{x_1 - 1}} = 1 + (x_1 - 1)^{1/4}$$

$$x_4 = 1 + \sqrt{x_3 - 1} = 1 + \sqrt{1 + (x_1 - 1)^{1/4} - 1} = 1 + (x_1 - 1)^{1/8}$$

⋮

$$x_n = 1 + (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$x_{n+1} = 1 + (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$x_n = 1 + (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 + (x_1 - 1)^2 (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \geq 1 + (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = x_{n+1}$$

$x_n > x_{n+1}$ (turun Definisi 2.3.1 (ii))

$$x_n = 1 + (x_1 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \geq 1 + (2 - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 2$$

Berarti $x_n \geq 2$, $\inf\{x_n\} = 2$ (batas bawah terkecil)

→ untuk $x_1 \geq 2$ $\lim(x_n) = \inf\{x_n\} = 2$ } + teorema 2.3.4

$$\lim(x_n) = \sup\{x_n\} = ?$$

→ x_1 tidak ada batas atas berarti $x_1 \approx \infty$

$$x_n = 1 + (\infty - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \infty$$

Diberikan $A \subset \mathbb{R}$ tak berhingga yang terbatas ke atas dan misalkan $u := \sup A$. Tunjukkan bahwa barisan ~~terdapat~~ barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $u = \lim(x_n)$.

$e \rightarrow A \neq \emptyset, A \subset \mathbb{R}, \forall x \in A, \exists u \in \mathbb{R} \rightarrow u \geq x$

$\rightarrow$ apakah x_n merupakan barisan naik jika $x_n \in A$?
Bagaimana jika x_n bukan barisan naik misalkan barisan turun maka menurut teorema 2.3.4(b)

$x = (x_n)$ turun ke bawah, maka $x = (x_n)$ konvergen dengan $\lim(x_n) = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ artinya $\exists u \in \mathbb{R} \exists u = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \rightarrow u \leq x_n$, untuk $\forall x_n \in A$, menurut ~~teorema~~ definisi

2.3(iii) bahwa $(x_{n+1} \leq x_n, \text{ dan } x_{n+1} \in A)$ maka

$u \leq x_{n+1} \leq x_n$, demikian juga $x_{n+2} \leq x_{n+1}$
 $x_{n+2} \in A \rightarrow u \leq x_{n+2} \leq x_{n+1} \leq x_n$, artinya setiap

$x \in A \rightarrow u \leq x$ artinya $u = \inf A$, kontradiksi
 $u = \sup(A)$; maka terbukti bahwa $u := \sup A$

bahwa barisan naik (x_n) dengan $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$
 $\exists u = \lim(x_n)$ adalah benar
definisi 1.3.2(b)

Tentukan apakah barisan (y_n) konvergen atau divergen dengan

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \text{ untuk } n \in \mathbb{N}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

$$\frac{1}{2} < y_n < 1 \implies \left. \begin{array}{l} \lim(y_n) = \sup(x_n) = 1 \\ \lim(y_n) = \inf(x_n) = 1/2 \end{array} \right\}$$

menurut Definisi 1.3.1 (c), y_n merupakan himpunan terbatas dan menurut teorema 2.2.2 bahwa x_n konvergen