

KULIAH MANDIRI
KONSEP ESSENSIAL MATEMATIKA SMA



DOSEN PENGAMPU:
RATNI PURWASIH, M.PD

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN SAINS
IKIP SILIWANGI

2020

PERSAMAAN KUADRAT

1. Pengertian

Persamaan kuadrat adalah sebuah persamaan polinomial (suku banyak) yang pangkat tertingginya 2 atau berorde 2. Salah satu contoh persamaan kuadrat seperti ini:.

Ini adalah orde 2 sehingga disebut persamaan kuadrat

$$2x^2 + 4x + 3 = 0$$

Contoh :

$$X^2 + 5x + 6 = 0$$

$$X^2 - 9 = 0$$

$$X^2 + 4x = 0$$

$$X + 6x = 0 \text{ (bukan)}$$

$$2x(x - 2) = 0$$

2. Cara Memfaktorkan

Faktorisasi adalah mengubah penjumlahan suku-suku aljabar ini menjadi bentuk perkalian. Metode ini digunakan dengan cara mengubah bentuk persamaan kuadrat

Bentuk umum persamaan kuadrat: $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c, \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

Dimana

x = variabel

a = koefisien x^2

b = koefisien x

c = konstanta

Faktor

Faktor adalah bilangan yang membagi habis suatu bilangan lainnya.

Persamaan kuadrat $a = 1$, yaitu: $x^2 + bx + c = 0$ dengan $a, b, c, \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

Kemudian difaktorkan menjadi bentuk $(x + m)(x + n) = 0$.

Jika dapat ditemukan pasangan faktor (m, n) yang memenuhi rumus $m + n = b$ dan $m \times n = c$.

Contoh soal 3: $x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + m)(x + n) = 0$$

$$(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \mapsto x = 1$$

$$x + 4 = 0 \mapsto x = -4$$

Jadi, akar persamaan kuadrat $x = 1$ dan $x = -4$

Koefisien $a > 1$

Persamaan kuadrat dengan $a > 1$, yaitu:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Kemudian difaktorkan menjadi bentuk

$$a(x + \frac{m}{a})(x + \frac{n}{a}) = 0$$

Jika dapat ditemukan pasangan faktor (m, n) yang memenuhi rumus

$$m + n = b$$

Persamaan kuadrat dengan $a > 1$ memiliki lima kemungkinan nilai koefisien dan konstanta, yaitu:

1. b dan c bilangan positif
2. b bilangan positif dan c bilangan negatif
3. b bilangan negatif dan c bilangan positif
4. b, c bilangan negatif

Dibawah ini di berikan masing-masing dua contoh soal persamaan kuadrat dan penyelesaiannya.

Contoh : $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Penyelesaian:

$$a = 2 \quad b = 5 \text{ dan } c = 3$$

$$a \times c = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} m + n = b \\ m \times n = a \times c \end{array} \right\} \quad m=2 \text{ dan } n=3$$

Pilih jumlah pasangan faktor $= b = 5$, maka $m = 2$ dan $n = 3$

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$a(x + \frac{m}{a})(x + \frac{n}{a}) = 0$$

$$2(x + \frac{2}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0$$

$$2(x + 1)(x + \frac{3}{2}) = 0$$

$$x + 1 = 0 \mapsto x = -1$$

$$x + \frac{3}{2} = 0 \mapsto x = -\frac{3}{2}$$

Jadi, akar persamaan kuadrat $x = -1$ dan $x = -\frac{3}{2}$

Contoh : $3x^2 + 10x + 3 = 0$

Penyelesaian:

$$a = 3 \quad b = 10 \text{ dan } c = 3$$

$$a \times c = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} m + n = b \\ m \times n = a \times c \end{array} \right\} \quad m=1 \text{ dan } n=9$$

Pilih jumlah pasangan faktor = $b = 10$, maka $m = 1$ dan $n = 9$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$a(x + \frac{m}{a})(x + \frac{n}{a}) = 0$$

$$3(x + \frac{1}{3})(x + \frac{9}{3}) = 0$$

$$3(x + \frac{1}{3})(x + 3) = 0$$

$$x + \frac{1}{3} = 0 \mapsto x = -\frac{1}{3}$$

$$x + 3 = 0 \mapsto x = -3$$

Jadi, akar persamaan kuadrat $x = -\frac{1}{3}$ dan $x = -3$

Contoh : $-2x^2 - 6x + 8 = 0$

Penyelesaian:

$$a = -2 \quad b = -6 \text{ dan } c = 8$$

$$a \times c = -16$$

$$\left. \begin{array}{l} m + n = b \\ mxn = axc \end{array} \right\} \quad m=2 \text{ dan } n=-8$$

Pilih jumlah pasangan faktor = $b = -6$, maka $m = 2$ dan $n = -8$

$$-2x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$a\left(x + \frac{m}{a}\right)\left(x + \frac{n}{a}\right) = 0$$

$$-2\left(x + \frac{2}{-2}\right)\left(x + \frac{-8}{-2}\right) = 0$$

$$-2(x - 1)(x + 4) = 0$$

$$x - 1 = 0 \mapsto x = 1$$

$$x + 4 = 0 \mapsto x = -4$$

adi, akar persamaan kuadrat $x = 1$ dan $x = -4$

3. Kuadrat Sempurna

Tidak semua persamaan kuadrat bisa diselesaikan dengan cara faktorisasi, cara lain untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna. Bentuk persamaan kuadrat sempurna adalah bentuk persamaan yang menghasilkan bilangan rasional. Penyelesaian persamaan kuadrat dengan melengkapi kuadrat menggunakan rumus:

$$(x+p)^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Ubah menjadi bentuk persamaan dalam $(x+p)^2 = q$

$$q = x^2 + 2px + p^2$$

Berikut ini prosedur menentukan akar-akar persamaan kuadrat cara melengkapi bentuk kuadrat sempurna.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (\div a)$$

$$\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = 0 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\text{Misalkan } \left(\frac{b}{2a}\right) = p$$

$$\text{maka } x^2 + 2px + p^2 = -\frac{c}{a} + p^2$$

$$\text{Misalkan } -\frac{c}{a} + p^2 = q, \text{ maka}$$

$$(x + p)^2 = q$$

$$\sqrt{(x + p)^2} = \pm \sqrt{q}$$

$$x + p = \sqrt{q} \mapsto x = -p + \sqrt{q}$$

$$x + p = -\sqrt{q} \mapsto x = -p - \sqrt{q}$$

Dari prosedut tersebut, jika diuraikan maka cara menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapkan bentuk kuadrat sempurna:

1. Dibagi koefisien a
2. Konstanta c/a pindah ruas
3. Ditambah konstanta p^2
4. Sifat utama
5. Diakar pangkatkan
6. Akar x_1 dan x_2

Contoh

$$x^2 - 10x + 7 = 0$$

$$x^2 - 10x = -7$$

$$x^2 - 10x + (-5)^2 = -7 + (-5)^2$$

$$x^2 + 2(-5)x + (-5)^2 = -7 + 25$$

$$(x - 5)^2 = 18$$

$$\sqrt{(x - 5)^2} = \sqrt{18}$$

$$x - 5 = \pm 3\sqrt{2}$$

Contoh:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0 \quad (\div 2)$$

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{7x}{2} - \frac{4}{2} = \frac{0}{2}$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x = 2$$

$$x^2 + \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$x^2 + 2\left(\frac{7}{4}\right)x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = 2 + \frac{49}{16}$$

$$\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{32}{16} + \frac{49}{16} = \frac{81}{16}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16}}$$

$$x + \frac{7}{4} = \pm \frac{9}{4}$$

4. RUMUS ABC

Pembuktian ini kita mulai dari bentuk umum persamaan kuadrat.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$$

Agar bisa diubah menjadi bentuk kuadrat, nilai a haruslah sebuah bilangan kuadrat. Bilangan kuadrat paling sederhana adalah 1, sehingga bagi kedua ruas dengan a (pembagian dengan a dibolehkan, mengingat $a \neq 0$).

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Kurangi kedua ruas dengan $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Tambahkan $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pada kedua ruas.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Ubah ruas kiri menjadi bentuk kuadrat dan sederhanakan ruas kanan.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi pemakluran dengan rumus ABC adalah:

Rumus ABC

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

By : Rumus.Co.Id

Contoh:

Silahkan cari nilai faktor dari persamaan kuadrat berikut ini dengan 3 metode penyelesaian.

$$5x^2 + 13x - 6 = 0$$

a. Cara memfaktorkan

$$5x^2 - 13x - 6 = 0$$

$$5x^2 - 15x + 2x - 6 = 0$$

$$5x(x-3) + 2(x-3) = 0$$

$$(5x+2)(x-3) = 0$$

$$5x+2 = 0 \rightarrow x_1 = -2/5$$

$$x-3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

$$\therefore H_p = \{-2/5, 3\}$$

b. Cara melengkapi kuadrat

$$5x^2 + 13x + 6 = 0$$

$$x^2 + \frac{13}{5}x + \frac{6}{5} = 0$$

$$x^2 + \frac{13}{5}x = -\frac{6}{5}$$

$$x^2 + \frac{13}{5}x + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{5}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$x^2 + \frac{13}{5}x + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \left(\frac{13}{10}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{13}{10}\right)x + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \left(\frac{13}{10}\right)^2 - \frac{6}{5}$$

$$\left(x + \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{169}{100} - \frac{120}{100}$$

$$\left(x + \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

$$x + \frac{13}{10} = \pm \frac{7}{10}$$

$$x = -\frac{13}{10} \pm \frac{7}{10}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 7}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{-13 - 7}{10} = -\frac{20}{10} = -2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-\frac{3}{5}, -2\right\}$

c. Cara rumus ABC

Silahkan kalian coba sendiri yahh!!!!

LATIHAN

1. $x^2 + 14x - 8 = 0$ (cara memfaktorkan)

2. $x^2 + 4x - 6 = 0$ (cara memfaktorkan dan rumus ABC)

3. $2x^2 + 5x + 3 = 0$ (melengkapkan kuadrat sempurna)

4. $3x^2 - 11x - 4 = 0$ (memfaktorkan, rumus ABC dan melengkapkan kuadrat sempurna)

.....selamat bekerja.....