**MATEMATIKA DISKRIT**

Referensi Materi

Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika

Fakultas Math & Sains

**IKIP Siliwangi Cimahi**



**Marchasan, Lexbin**

**Revisi ke-2 ‘17, Mandiri. Cimahi, 2020**

**KATA PENGANTAR**

Syukur dipanjatkan kepada Tuhan. Dia telah menciptakan bumi dan langit dan segala isinya dan dengan setia memelihara segala yang diciptakan-Nya. Demikian halnya, Rahmat dan Pemeliharaan-Nya telah dianugrahkan sehingga penulisan materi perkuliahan mata kuliah Matematika Diskrit dapat diselesaikan.

Buku ini ditulis atas dasar kebutuhan mengacu pada karakteristik mahasiswa, silabus / acara perkuliahan, dan jawaban atas beban penulis berdasar kepercayaan Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Math & sains IKIP Siliwangi Cimahi. Dan merupakan kompilasi rujukan relevan.

Penulisan yg berpondasi hal diatas, merupakan kompilasi dari sumber-sumber yg relevan dan sejalan kondisi pandemi covid 19 yg karenanya hanya ada satu pilihan perlakuan yaitu perkuliahan secara daring.

Sekalipun buku ini ditulis untuk memenuhi kebutuhan, mudahan bisa memenuhi syarat cukup.

Harapan, manfaat yang didapat sebagaimana tujuan. Untuk mewujudkannya; saran, koreksi atas materi ajar ini diharapkan dari semua pihak. Dan tentu, penulis akan terus menyempurnakannya.

 Cimahi, 4 September 2020

 penulis

**DAFTAR ISI**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Hal |
| KATA PENGANTAR …………………………………………………... | i |
| DAFTAR ISI …………………………………….………………………... | ii |
| BAB I TEORI GRAPH ...........................................…..… | 1 |
| 1. Pembuka .................................................................. | 1 |
| 2. Graph Multigraph Degree dan Verteks .………………… | 8 |
| 3. Path konektivitas dan Graph Terhubung ….............. | 26 |
| 4. Matriks dan Graph .................................................. | 44 |
| 5. Graph Berlabel Isomorphis dan Homomorphis ..... | 47 |
| BAB II GRAPH PLANAR DAN TREE .................................. | 53 |
| 1. Graph Planar ........................................... ………….
 | 53 |
| 1. Pemetaan dan Region ...........................................
 | 54 |
| 1. Formula Euler ..........................….........................
 | 55 |
| 1. Graph tak Planar ................................................…..
 | 55 |
| 1. Graph Berwarna ........………....................................
 | 55 |
| 1. Graph Bipartisi dan Pewarnaan .......……...............
 | 58 |
| 1. Graph Planar dan Pewarnaan .......…….................
 | 59 |
| 1. Warna dan Pemetan ..................…......................
 | 59 |
| 1. Tree .....................................................................
 | 59 |
| 1. Tree dan Pewarnaan ............................................
 | 60 |
| BAB III ANALISIS KOMBIINASI ................................ ….. | 68 |
| 1. Konsep Perhitungan Notasi Faktorial ..............…….
 | 68 |
| 1. Koefisien Binomial ...........................................…...
 | 71 |
| 1. Permutasi ......................................……..................
 | 72 |
| 1. Kombinasi dan Relasi Berulang ...........................
 | 73 |
| BAB IV REFERENSI TAMBAHAN ................................ | 79 |
| 1. Enumerasi Pohon, Teorema Penjodohan, Prinsip Sarang Burung Merpati dan Fungsi Pembangkit ....
 | 79 |
| DAFTAR RUJUKAN ....................................................... | 82 |

BAB I

TEORI GRAPH

1. Pembuka

 Teori graph, pertama kali diketemukan sebagai hasil pekerjaan Leonhard Euler yang terkenal sebagai persoalan tujuh jembatan. Sehinga diasumsikan tulisan ilmiah pertama mengenai teori graf memang dibuat oleh Euler.

Pada tahun 1736 Euler menulis “Solutio problematic ad geometriam situs pertinentis, Commetarii Academiae scientiarum impearialis petropolitanae” yang dalam bahasa inggris (secara bebas) menjadi “the solution of a problem relating to the geometry of position”.

Euler merupakan orang yang pertama mengembangkan geometry menjadi masalah independent terhadap pengukuran. Dalam paper yang ditulis oleh Euler tersebut, membahas mengenai masalah yang terjadi disekitar Konigsberg yang dibelah sungai Pregel pada saat tersebut.

Euler menggeneralisasi permasalah tersebut dan memberikan kondisi dimana masalah tersebut dapat diselesaikan dengan tanpa mempermasalahkan masalah pengukurannya. Berikutnya, kita dapat melihat

bagaimana yang disebut dengan tujuh jembatan di Konigsberg menjadi inspirasi.

 Suatu grah adalah suatu objek mathematical dengan dua jenis unsur; puncak ( kadang-kadang disebut node), dan sisi.

Pikirlah tentang puncak sebagai poin-poin dan yang membingkai seperti bentuk yang menghubungkan sebagian dari poin-poin satu sama lain, atau berpikir tentang WWW.

Masing-masing komputer adalah suatu puncak, dan sisinya adalah semua bentuk telepon yang dapat saling terhubung. Atau suatu contoh sederhana, berupa gambar bersisi empat dengan tepi menghubungkan tiap-tiap pasangan yang mungkin. Grafik seperti itu disebut sebagai suatu 4-graph lengkap dan adalah salah satu dari suatu kelompok grafik yang serupa dengan n puncak yang disebut sebagai n-graphs lengkap.

Suatu grafik lengkap adalah suatu grafik di mana

tiap-tiap puncak dihubungkan. Grafik yang lengkap dengan empat puncak disebut k4. Grafik yang lengkap dengan tiga puncak disebut k3 yang berupa suatu segi tiga.

Mathworld mempunyai ilustrasi k2 sampai k7. Suatu grafik lengkap dengan n puncak yang dapat disebut kn, mempunyai persisnya n(n-1)/2 sisi.

Secara universal digunakan untuk apa yang kita sekarang sebut sebagai sebuah grafik lengkap. Misal kita ingin suatu grafik yang menunjukkan bahwa kita dapat pindah dan bergerak antara dua node didalam satu arah tertentu saja.

Dalam hal ini, segmen tepi dapat direpresentasikan dengan suatu panah dari satu node kepada node yang lain. Hal ini dapat sebagai/penanda arah yang bisa diterima untuk bergerak, dan grafiknya disebut sebagai grafik terarah.

Ilustrasi, dua node dikatakan bertetangga jika terdapat sisi yang mengubungkan mereka.

**Graph lintasan dan sirkuit Hamilton**

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui setiap simpul di dalam graf tepat satu kali. Bila lintasan itu kembali ke simpul awal dan membentuk lintasan tertutup maka disebut sirkuit Hamilton

Graph yang memiliki sirkuit Hamilton dinamakan graph Hamilton, sedangkan graf yang memiliki lintasan Hamilton disebut graph semi Hamilton.

Berikut contoh.

**Gambar 2 : Contoh Graph Hamilton**

**Lintasan Euler dan Sirkuit Euler**

 Jika kita berjalan dan mulai pada suatu node, kemudian berjalan terus menurut alur hingga membentuk sebuah bingkai tanpa tiba di node yang manapun lebih dari sekali, maka graf tersebut disebut memiliki sebuah lintasan Euler. Dan jika alur berakhir di puncak yang sama di mana graph tersebut dimulai maka ia disebut sebagai suatu sirkuit Euler (permasalahan, penjelasan, dan ilustrasi seperti ditunjukkan dalam Isaac

Reed dalam Lokasi web).

 Dengan kalimat lain kita katakan; Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing busur di dalam graf tepat saatu kali. Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk lintasan tertutup, maka lintasan itu dinamakan sirkuit Euler

 Graph yang mempunyai sirkuit Euler dinamakan graf Euler, dan graph yang mempunyai lintaan Euler dinamakan graf semi Euler.

Dalam sebuah catatan dari Ed Sandifer menyatakan, “didalam paper dari Euler tentang Permasalahan jembatan Konigsberg, semua yang ia katakan tentang menemukan jalur tersebut hanyalah jika kamu menghilangkan semua semua sisi yang dobel, maka akan menjadi mudah untuk menemukan solusinya.”. Untuk sebuah translasi dari lembaran paper asli dari Euler etrsebut dan sejarah dari hal tersebut kita dapat melihat [N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R.J. Wilson. Graph Theory 1736-1936. Clarendon Press, Oxford, 1976 ].

Algoritma yang paling umum yang saya temukan adalah algoritmam fleury yang ditemukan oleh matematikawan prancis yang tidak terkenal bernama Fleury yang terdapat dalam bukunya, yaitu Deux problemes de geometrie de situation, Journal de mathematiques elementaires 1883, 257-261 (Penjelasan dari algoritma fleury dapat dilihat langsung pada website tertentu).

Sirkuit Hamilton adalah sebuah sirkuit dalam bidang matematika yang dinamakan berdasarkan nama seorang matematikawan berkebangsaan irlandia bernama Sir William Rowan Hamilton. Setiap graph komplit dengan n>2 memiliki sebuah sirkuit Hamilton.

Sirkuit tersebut akan melewati setiap node sebanyak sekali tanpa akan menyentuh sirkuit lainnya lebih dari sekali. Jadi dimungkinkan akan lebih dari satu lintasan Hamilton untuk sebuah graph, lalu kemudian kita akan berharap akan menemukan jarak terpendek untuk sebuah jalur tertentu. Ini seringkali direferensikan sebagai traveling salesman atau masalah pengantaran tukang pos.

Gambar 3 : Gambaran Chinese Postman Problem

 Pada tahun 1962, Ahli matematik Cina M K Kwan
( Meigu Guan) berpikir untuk suatu jenis masalah yang dikenal sebagai Masalah Tukang pos Cina.

Jika suatu sirkuit tidak mempunyai suatu sirkuit Euler, berarti sirkuit itu berupa sirkuit yang paling pendek dari semua lintasan yang mungkin, sekalipun beberapa tepi harus dilintasi lebih dari sekali.

Pada halaman dari halaman NIST ditemukan bahwa artikel Kwan yang menunjuk optimizing suatu rute tukang pos, pada suatu jurnal matematika di Cina. Kemudian Alan Goldman mengusulkan nama untuk itu, yaitu "Masalah Tukang pos Cina" kepada Jack Edmonds ketika Edmonds berada di dalam Riset Operasi Goldman di Kantor Standard Nasional Amerika Serikat, sekarang NIST ( Alan Goldman, personal communication, 14 Desember 2003).

 Istilah Node adalah dari Latin nodus artinya berhubungan erat, kata-kata kita jerat/simpul dan tombol. Kata Circuit adalah berasal dari kata circumire,
 " untuk berkeliling", merupakan bagian dari kata Latin umum identik dengan kata lingkaran, Kata Bahasa Inggris circuitous. Kata edge digunakan untuk baris penghubung puncak suatu segi banyak atau polyhedron.

1. Graph Multigraph Degre suatu Verteks

 Graph **G(V,E)** didefinisikan sebagai pasangan himpunan **(V,E)**, dengan **V** adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari simpul-simpul (verteks atau node). Dan **E** adalah himpunan berhingga dari busur (vertices atau edge).

Multigraph G = (V,E) terdiri dari suatu himpunan V (verteks) dan suatu himpunan E (edge) kecuali itu E mengandung multiple edge, yaitu beberapa edge yang menghubungkan titik-titik ujung yang sama, E mungkin mengandung satu atau lebih loop, yaitu sebuah edge yang titik-titik ujungnya adalah verteks yang sama.

Contoh :

V = {v1, v2, v3, v4}

E = {e1, e2, e3, e4, e5}

E = {(v1,v2), (v1,v2), (v1,v3), (v2,v3), (v3,v3)}

Relasi adjasency dan incidence dalam sebuah graph. Misalkan e = {u,v} adalah sebuah edge dalam G, yaitu u dan v adalah titik-titik ujung dari e. Maka verteks u dikatakan adjacent (berelasi) terhadap verteks v dan edge e dikatakan incidence (terhubung) pada u dan pada v.

Derajat sebuah verteks v pada sebuah verteks G, ditulis dengan deg(v), adalah jumlah edge yang incident (terhubung) pada v, atau jumlah edge yang memuat v sebagai titik ujung. Paritas (genap atau ganjil) dari sebuah verteks tergantung dari jumlah deg(v) genap atau ganjil.

Teorema 1

Jumlah derajat suatu verteks dari sebuah graph sama
dengan dua kali jumlah edgenya.

Bukti: mengikuti kenyataan bahwa setiap edge dihitung dua kali dalam perhitungan derajat suatu verteks pada sebuah graph.

Catatan: teorema 1 berlaku untuk sebuah multigraph. Alasan dasar adalah karena (misalnya) sebuah loop, dihitung dua kali pada saat menetukan derajat titik ujungnya.

Contoh:

Perhatikan graph G=G(V,E) pada gambar berikut

1. Terangkan G secara formal
2. Trntukan derajat dan varitas dari setiap verteks pada G
3. Buktikan keberlakuan teorema 1 pada G

 Solusi:

1. Terdapat lima verteks, jadi V = {A, B, C, D, E}. Ada tujuh pasangan {x,y} dari vertekks dimana verteks x terhubung dengan verteks y sehingga E=[{A,B},{A,C},{A,D},{B,C},{B,E},{C,D},{C,E}]
2. Derajat dari sebuah verteks sama dengan jumlah edge yang ia miliki. Di sini deg(A)=3 karena A angggota dari {A,B},{A,C},{A,D} atau terdapat tiga edge yang meninggalkan A di dalam diagram G seperti yang nampak pada gambar. Dan berdasar konsep yang sama deg(B)=3, deg(C)=4, deg(D)=2, deg(E)=2. Sehingga C, D, E adalah verteks genap dan A, B adalah verteks ganjil.
3. Jumlah derajat dari verteks-verteks adalah m = 3 +3+4+2+2 = 14 yang ternyata sama dengan dua kali jumlah edgenya (dalam hal ini teorema 1 berlaku).

**Istilah**

Gelang (*loop*) yaitu busur yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama.

Busur ganda (*multiple edge*) yaitu suatu busur yang menghubungkan simpul yang sama

Ketetanggaan (*adjacent*) : dua buah simpul dikatakan bertetangga, jika terdapat busur e dengan ujung awal dan akhir adalah v1 dan v2. ( e=(v1,v2) )

Kehadiran (*incident*) : suatu busur dikatakan hadir pada suatu simpul, jika busur tersebut menghubungkan simpul

tersebut.

Derajat (*degree*) yaitu banyaknya busur yang ada pada suatu simpul v. ( d(v) )

Simpul terminal adalah simpul yang berderajat 1

Simpul terpencil adalah simpul yang berderajat 0, dan

tidak bertetangga dengan simpul lain.

n = |V| = kardinalitas simpul

m = |E| = kardinalitas busur

**Lintasan**

 Sederetan busur atau simpul atau busur dan simpul secara berselang seling yang membentuk sambungan yang tidak putus pada graph G.

 **Macam Lintasan**

1. Lintasan Sederhana

 Lintasan yang setiap simpul yang dilalui berbeda

1. Lintasan Tertutup

Lintasan yang berawal dan berakhir disimpul yang
 sama

1. Lintasan Terbuka

Lintasan yang berawal dan berakhir disimpul yang
 berbeda

 Jalan (walk) adalah sederetan busur-busur yang membentuk sambungan yang tidak putus di G

Lintasan (*path*) adalah sedereretan simpul dan busur yang berselang seling dari simpul awal V0 dan simpul akhir Vn ,

sedemikian sehingga e1 = (v0,v1), e2  = (v1,v2), …, en = (vn-1,vn), adalah busur-busur dalam graph.

Panjang suatu lintasan adalah banyaknya busur-busur pada jalan tersebut.

 Penulisan lintasan pada graph sederhana, hanya menuliskan simpul-simpul yang dilalui, sedangkan pada graph dengan sisi ganda, harus menuliskan urutan busur dan simpul secara berselang-seling sesuai dengan jalan yang dilalui.

 Lintasan sederhana adalah lintasan yang setiap simpul yang dilalui berbeda (atau setiap busur yang dilalui hanya satu kali).

 Lintasan Tertutup (*closed path*) adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama

 Lintasan Terbuka (*open path*) adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang berbeda.

Contoh :

 G1

 G2



Jalan antara V1 dan V4 di G1: e3 atau e1-e2-e4-e7 atau
 e1-e6-e7

Lintasan v1 dan v4 di G1: e3 atau e1-e2-e 7 atau e1-e6-e7

Lintasan v1 dan v4 di G2: e3 atau e1-v5-e2-v2-e4-e2-v3-
 e7 atau e1- v5-e6 3-e7

Lintasan sederhana : v1- v5-v3-v4

Lintasan tertutup : v1- v5-v2-v3-v4-v1

Lintasan terbuka : v1- v5-v2-v3-v4

Graph G1 adalah graf terhubung, sedangkan G2 merupakan graph tidak terhubung (*disconnected* *graf*)

**Macam Graph**

1). Graph kosong

2). Graph Sederhana

3). Graph tidak sederhana

4). Graph berarah

5). Graph berbobot

**Graph Sederhana**

1). Graph Lengkap

Graph lengkap disepakati sebagai graf yang semua
 simpulnya saling bertetangga, m = n(n-1)/2

2). Graph Regular

Graph regular adalah graf dengan semua simpul berderajat sama, m = (n.r)/2

3). Graph Lintasan

Graph yang menyerupai lintasan, (m = n-1)

4). Graph Lingkaran

Graph yang berbentuk lingkaran, (m = n)

5). Graph Roda

Graph lingkaran dengan satu titik pusat

6). Graph Petersen

Graph Petersen adalah graf dengan semua
 simpulnya berderajat 3

7). Graph Planar

Graph Planar adalah graph yang dapat digambarkan dalam 2 dimensi dan tidak saling berpotongan

8). Graph Bipartite

Graph bipartite disepakati sebagai graph yang dibagi menjadi 2 kelompok simpul yang bertetangga, tetapi tidak bertetangga pada kelompok yang sama

 Graph dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori, yaitu :

1). Graph Kosong (*Null graph*)

Graph kosong adalah graph dengan himpunan busurnya merupakan himpunan kosong.

Dinotasikan dengan Nn

Contoh :

2). Graph Sederhana (*simple graph*)

 Graph sederhana adalah graph yang tidak

mempunyai gelang (*loop*) dan/atau sisi ganda (*multiple edge*)

Terdapat beberapa macam graph sederhana, yaitu :

a) Graph lengkap (*complete graph*)

Graph lengkap adalah graph dengan setiap pasang simpulnya saling bertetangga, dengan jumlah busur (m) = (n.(n-1))/2

Dinotasikan dengan Kn

Contoh :

b) Graph teratur (*regular graph*)

Graph teratur adalah graph yang semua simpul dalam graph trsebut berderajat sama, dengan jumlah busur (m) = (n.r)/2, dan r adalah nilai derajat simpul

Dinotasikan dengan Kn

Contoh :

c) Graph Lintasan (*paths*)

Graph lintasan adalah graph yang bentuknya menyerupai garis lurus, m=n-1.

Dinotasikan dengan Pn

Contoh :

d) Graph lingkaran (*Cycles*)

Graph lingkaran adalah graph yang bentuknya menyerupai lingkaran, dengan m=n

Dinotasikan dengan Cn

Contoh :

e) Graph Roda (*Wheels*)

Graph Roda adalah graph lingkaran yang setiap simpulnya dihubungkan dengan simpul di tengah lingkaran.

Dinotasikan dengan Wn

Contoh :

3). Graph tidak sederhana (*unsimple graph*)

Graph tidak sederhana adalah graph yang mempunyai gelang (*loop*) dan/atau sisi ganda

(*multiple edge*)

a). Graph Ganda (*Multigraph*) adalah graph yang mempunyai sisi ganda

b). Graph Semu (*Pseudograph*) adalah graph yang mempunyai gelang / *loop*

Contoh :

4). Graph dengan kekhususan tertentu

a). Graph Petersen

 Graph Petersen adalah graph teratur yang mempunyai derajat simpul 3 pada semua simpulnya.

 Contoh :

b). Graph Planar

Graph Planar adalah graph yang dapat digambarkan

 dalam satu bidang dengan busur-busur yang tidak saling memotong

 Contoh :

c). Graph Bipartite

Graph Bipartite adalah graph G graph G dengan himpunan simpulnya dapat dibedakan dan dipisahkan menjadi dua himpunan bagian, yaitu V1 dan V2, sedemikian sehingga setiap busur di G menghubungkan ke satu simpul di V1 ke satu simpul di V2, dengan kata lain setiap pasang simpul di V1 tidak bertetangga, dan setiap pasang simpul di V2 juga tidak bertetangga.

Dinotasikan Sebagai G(V1,V2) ↔ Kn,m

Jika setiap simpul di V1 bertetangga dengan semua

simpul di V2, maka disebut graph bipartite lengkap

(*complete bipartite graph*).

Contoh:



d). Graph Berarah (*Directed graph*)

Graph berarah adalah graph yang semua busurnya mempunyai arah

contoh :

e). Graph Berbobot (*Weighted graph*)

Graph berbobot adalah graph yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot) tertentu.

Contoh :

* Setujukah dengan pernyataan berikut

Graph-graph (multigraph) G=G(V,E) digambarkan dalam ruang sebagai berikut. Setiap verteks v dalam V diwakili oleh sebuah noktah (lingkaran kecil) dan setiap edge e={u,v} diwakili oleh suatu kurva yang menghubungkan titik-titik ujung u dan v. Kenyataannya, kita terbiasa menyatakan sebuah graph dengan menggambar diagramnya dibanding menuliskan verteks-verteks dan edge-edgenya.

Masalah 1

Terangkan graph seperti yang ditunjukan gambar

Solusi: Gambar menunjukan bahwa graph G=G(V,E)
 berupa (i) V yang terdiri dari verteks A, B, C, D;
 dan (ii) E yang terdiri dari lima edge yaitu
 e1={A,B}, e2={A,D}, e3={C,D}, e4={B,C}, dan
 e5={A,C}

Masalah 2

Tentukan m (jumlah derajat verteks-verteks dari G), dimana V(G)={A,B,C,D} dan

1. E(G)=[{A,B},{A,C},{B,D},{C,D}]
2. E(G)=[{A,B},{A,C},{A,D},{B,A},{B,B},{C,B},{C,D}]

Solusi:

Pertama mungkin dengan membuat gambar untuk diagram G. Atau bila hanya ingin menjawab permasalahan, maka teorema satu di atas dapat digunakan. Sehingga untuk a=8 dan untuk b=14

Soal Latihan 1

1. G mengandung multiple edge yaitu e4 dan e5, yang menghubungkan dua verteks yang sama yaitu B dan D. Pada G juga mengandung sebuah loop e7 yang titik-titik ujungnya sama yaitu titik C.
2. Gambar diagramnya
3. Apakah G sebuah graph? Jelaskan.
4. Gambarkan diagaram untuk setiap multigraph G=G(v,E) berikut dimana V= {P1, P2, P3, P4, P5} dan
5. E=[{P2,P4}, {P2,P3}, {P3,P5}, {P5,P4}]
6. E=[{P1,P1}, {P2,P3}, {P2,P4}, {P3,P4}, {P4,P1}, {P5,P4}]
7. Terangkan graph yang ditunjukan gambar berikut

1. Gambarkan diagram untuk setiap graph G=G(V,E) berikut:
2. V={A,B,C,D}, E=[{A,B},{D,A},{C,A},{C,D}]
3. V={a,b,c,d,e,f}, E=[{a,d},{a,f},{b,c},{b,f},{c,e}]
4. Gambarkan diagram untuk setiap G=G(V,E) berikut dimana V={P1,P2,P3,P4,P5}dan
5. E=[{P1,P5},{P3,P4},{P2,P3},{P2,P5},{P1,P5}]
6. E=[{P2,P4},{P2,P3},{P5,P1}
7. Tentukan apakah setiap multigraph G=G(V,E) berikut adalah sebuah graph dimana V={A,B,C,D} dan
8. E=[{A,B},{A,C},{A,D},{B,C},{C,D}]
9. E=[{A,B},{B,B},{A,D}]
10. E=[{A,B},{C,D},{A,B},{B,D}]
11. E=[{A,B},{B,C},{C,B},{B,B}]
12. Terdapat lima verteks, yaitu V={P1,P2,P3,P4,P5} dan ada delapan edge (dua multiple edge dan satu loop) juga delapan pasang verteks, yaitu E=[{P1,P2}, {P1,P2},{P1,P4},{P1,P5},{P2,P4},{P3,P4},{P3,P5},{P5,P5}. Buat gambar diagramnya.
13. Terdapat enam vertek, yaitu V={F,G,H,I,J,K}. Dan ada tujuh edge (dua multiple edge dan dua loop) selain tujuh pasang verteks, yaitu E=[{F,I},{F,K},{H,I},{I,I}.{H,J},{K,K}]
14. Perhatikan yang berikut (dapat digunakan combinasi untuk a dan untuk b, berhingga atau tak berhingga sehingga tidak terdapat jumlah m maksimum).

Misalkan G=G(V,E) mempunyai lima verteks. Tentukan jumlah edge maksimum m dalam E jika:

1. G adalah sebuah graph
2. G adalah sebuah multigraph
3. a. Misalkan v adalah sebuah verteks terisolasi pada sebuah graph (multigraph) G. Berapakah derajatnya? b. Perhatikan G=G(V,E) dimana V={u,v,w} dan deg(v)=4. (i) apakah terdapat graph seperti G, jelaskan (ii) apakah terdapat multigraph seperti G jelaskan dengan memberi contoh
4. Perhatihan gambar berikut

tentukan derajat setiap verteksnya

1. Path Konektivitas dan Graph Terhubung

 Path kita lambangkan dengan didefinisikan sebagai panjang dari yaitu jumlah dari n edge dari .

Sebuah path pada G dengan titik asal v0 dan titik akhir vn adalah barisan berganti dari verteks-verteks dan edge-edgenya. Sehingga berbentuk v0, e1, v1, e2, v2, ..., en-1, vn-1, en, vn dimana setiap edge ei incedent (terhubung) pada verteks-verteks vi-1 dan vi.

Jika tidak ada arti lain kita dapat menyatakan  sebagai barisan edge-edgenya berupa = {e1, e2, ..., en} atau sebagai barisan verteksnya berupa  = {v0, v1, v2, ..., vn}

Simple path (path sederhana) dalam sebuah graph

(multigraph) G merupakan sebuah path () dengan semua verteksnya berbeda. Dan merupakan sebuah trail jika semua edgenya berbeda.

Path tertutup pada sebuah graph (multigraph) G jika untuk path = { v0, v1, v2, ..., vn}, v0 = vn, atau titik asal dari = titik akhir dari . jadi path  adalah sebuah cycle (putaran) jika ia tertutup dan jika semua verteknya berbeda kecuali v0=vn. Dan sebuah cycle dengan panjang K disebut cycle K. Sebuah cycle pada sebuah graph harus mempunyai panjang tiga atau lebih.

Misal u dan v adalah verteks pada sebuah graph G. Jarak antara u dan v yang ditulis dengan d(u,v) adalah nol atau d(u,v) = 0 jika u = v. Sebaliknya d(u,v) = panjang dari sebuah path terpendek antara u dan v. Dan jika tidak ada path antara u dan v maka d(u,v) tak terdefinisi.

Teorema 2

Ada sebuah path dari verteks u ke v jika dan hanya
 jika terdapat sebuah path sederhana dari u ke v.

Bukti:

Karena setiap path sederhana adalah sebuah path,
 kita hanya perlu membuktikan bahwa jika ada sebuah
 path  dari u ke v maka ... dan seterusnya (dibahas

dalam perkuliahan).

Sebuah graph (multigraph) terhubung jika terdapat sebuah path antara sembarang dua verteksnya.

Diameter dari sebuah graph terhubung G di tulis diam(G), adalah jarak maksimum antara sembarang dua verteksnya.

Masalah 3

Perhatikan graph G seperti pada gambar berikut

1. Ubahlah barisan edge berikut: (i)  = {e1, e4, e6, e5} dan (ii)  = {e2, e5, e3, e4, e6, e3, e1} dalam barisan verteks terkaitnya.
2. Tentukan semua path sederhana dari verteks A sampai ke verteks Z
3. Tentukan d(A,Z)

Solusi:

Untuk a. Tulis verteks awal dari edge pertama diikuti
 oleh verteks terakhirnya. Dari setiap edge dalam

 barisan

Untuk b. ingat bahwa sebuah path dari A ke Z adalah
 simple jika tidak ada verteks yang berulang.
 Untuk ini akan didapat empat path sederhana

Untuk c. d(A,Z) = 2 karena path  terpendek dari A ke Z
 adalah  = {A, B, Z}

Masalah 4

Tentukan apakah setiap graph seperti gambar berikut adalah terhubung?

Solusi:

Untuk gambar (a). Ya, karena terdapat sebuah path
 antara sembarang dua verteks pada
 graph.

Untuk gambar (b). Tidak. Di sini A,B,Y terhubung dan C,
 x terhubung. Tetapi tidak terdapat path
 dari A, B, Y ke salah satu C atau X.

Untuk gambar (c). Ya. Terdapat sebuah path antara
 sebarang dua verteks pada graph.

Untuk gambar (d). Tidak. Karena tidak terdapat satu

 path pun dari C ke sebarang verteks
 yang lain pada graph.

Masalah 5

Perhatikan graph terhubung G berikut

Tentukan diameternya.

Solusi:

Seperti nampak pada gambar bahwa d(A,Z) = 2. Inilah jarak maksimum antara sembarang dua vektor dalam G. Jadi diam (G) = 2

Soal Latihan 2

1. Misalkan G adalah graph seperti yang ditunjukan gambar pada masalah 5. Tentukan: (a) semua path sederhana dari verteks A sampai verteks Z, dan (b) d(A,Z)
2. Misalkan G adalah graph seperti yang ditunjukan gambar pada masalah 5. Tentukan sebuah cycle untuk: (a) k=3, (b) k=4, (c) k=5, (d) k = 6. **Ctt.**; ingat sebuah cycle k adalah path tertutup dengan panjang

k dimana semua verteksnya berbeda (kecuali v0=vn).

1. Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar berikut;

Tentukan apakah setiap barisan berikut membentuk sebuah path:

1. ({A,X}, {X,B}, {C,Y}, {Y,X})
2. ({A,X}, {X,Y}, {Y,Z}, {Z,A})
3. ({X,B}, {B,Y}, {Y,C})
4. ({B,Y}, {X,Y}, {A,X})
5. Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar pada soal nomor tiga di atas. Tentukan: (a) semua path sederhana dari A ke C, dan (b) d(A,C)
6. Perhatikan gambar berikut

Manakah dari mereka yang: (a) Terhubung, (b) Loop bebas (tidak mempunyai loop), (c) Graph?

1. Perhatikan multigraph berikut

manakah dari mereka yang:
 (a) Terhubung,
(b) Graph?

1. Perhatikan graph G seperti gambar berikut

.

Tentukan diameter dari graph terhubung G tersebut.

1. G adalah graph seperti gambar berikut

tentukan apakah setiap pernyataan berikut merupakan sebuah path tertutup, trail, path

 sederhana atau cycle:

(a) (B, A, X, C, B) (d) (B, A, X, C, B, Y)

(b) (X, A, B, Y) (e) (A, B, C, X, B, A)

(c) (B, X, Y, B) (f) (X, C, B, A)

**Sub Garaph**

Definisi; H(V’,E’) adalah sebuah subgraph dari G=G(V,E)
 jika V’  V dan E’  E.

 Hal ini bermakna, jika G adalah sebuah graph maka

H adalah subgraph dari G jika V(H)  V(G), yaitu verteks-verteks dari H juga verteks-verteks dari G, dan E(H)  E(G), yaitu edge-edge dari H juga edge-edge dari G.

H=H(V’,E’) adalah subgraph dari G=G(V,E), dikatakan subgraph penuh bila H berupa subgraph dari G yang dibangun oleh V’. Artinya E’ mengandung semua edge dari E yang titik ujungnya ada di V’.

**Komponen Terhubung**

 Misalkan G adalah sebuah graph (multigraph). Sebuah komponen terhubung dari G dapat direpresentasikan dengan menuliskan keterhubungan verteks-verteksnya.

Sebuah verteks v disebut titik potong untuk G jika G-v tidak terhubung

Definisi Keterhubungan dalam graph :

Suatu graph G disebut terhubung (connekted) apabila setiap pasang simpul sembarang,

misal: u dan v, di G mempunyai suatu lintasan dari simpul u menuju simpul V.

Lintasan tertutup adalah lintasan dengan simpul awal dan lintasan simpul akhir sama (u=v).

Contoh :

 G1 G2

Graph G1 adalah graph terhubung, sedangkan G2 merupakan graph tidak terhubung (*disconnected graph*)

**Jembatan**

 Sebuah edge e adalah sebuah jembatan (bridge) untuk G jika G-e tak terhubung. Dengan kata lain e adalah bridge untuk suatu graph G jika G-e mempunyai komponen terhubung lebih dari G

Masalah 6

Perhatikan graph G = G(V,E) seperti gambar berikut

Tentukan apakah H=H(V’,E’) merupakan sebuah subgraph dari G dimana:

1. V’ = {A, B, F} dan E’ = [{A, B}, {A, F}]
2. V’ = {B, C, D} dan E’ = [{B, C}, {B, D}]
3. V’ = {A, B, C} dan E’ = [{A, B}, {A, C}]

Solusi: Ingat, H adalah sebuah subgraph dari G jika H
 adalah sebuah graph dan verteks-verteksnya
 termuat dalam V dan edge-edgenya dalam E

Untuk a; bukan karena verteks F bukan sebuah verteks
 pada G. Dan seterusnya.

Masalah 7

Tentukan komponen terhubung dari graph G pada gambar berikut

Solusi:

Mulailah dengan satu verteks. Misal A, kemudian tentukan semua verteks yang yang terhubung ke A; didapat komponen {A, B, Y, Z}. Selanjutnya pilih sebuah verteks yang tidak termasuk komponen ini, dan terus ulangi proses tersebut sampai semua komponen teridentifikasi. Dan untuk graph ini kita dapat dua komponen lagi yaitu {C, X, J} dan {H, I}. Sehingga komponen-komponen dari G

adalah {A, B, Y, Z}, {C, X, J}, dan {H, I}.

Masalah 8

Misalkan graph G seperti ditunjukan gambar berikut

Tentukan:

1. G – J, (b) G – K, (c) G – L

Solusi: hasilnya nampak pada gambar berikut:

Masalah 9

Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar berikut

1) Tentukan: (a) G – {A, B}, (b) G – {B, C},
 (c) G – {B, D}, (d)G – {C, D}

2) apakah G mempunyai suatu bridge?

Solusi

Untuk 1) ditunjukan dengan gambar berikut

Untuk 2)

Pada gambar untuk jawaban nomor 1)
 menunjukan bahwa hanya G – {A, B} yang tidak
 terhubung; sehingga hanya {A,B} yang
 merupakan sebuah bridge untuk G

Soal latihan 3

1. Perhatikan kembali graph G=G(V,E) pada gambar masalah 9 di atas. Kemudian tentukan subgraph penuh H=H(V’,E’) dari G yang dibangun oleh: (a) V’={A,B,C}, (b) V’={A,C,D}, (c)=V’={A,D}; (d) tentukan jumlah subgraph penuh dari G
2. Tentukan komponen-komponen terhubung dari G untuk V(G)={A,B,C,X,Y,Z} dan (a) E(G)=[{A,X},{C,X}] (b) E(G)=[{A,Y},{B,C},{Z,Y},{X,Z}]
3. Tentukan komponen-komponen terhubung dari untuk

 V(G)={A,B,C,P,Q} dan

 (a) E(G)=[{A,C},{B,Q},{P,C},{Q,A}, (b) E(G)=

1. Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar berikut

tentukan:

1. G-A (b) G-B (c) G-C
2. Misalkan G adalah graph dimana V(G)={A,B,C,X,Y,Z} E(G)=[{A,C},{A,X},{A,Y},{B,Y},{B,Z}]
3. Tentukan G – A
4. Tentukan jumlah komponen terhubung dari G - A
5. Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar berikut

Apakah G mempunyai titik potong?

1. Perhatikan kembali graph seperti ditunjukan gambar pada soal nomor 6 di atas. Apakah G mempunyai

suatu bridge?

1. Misalkan G adalah graph seperti ditunjukan gambar berikut

Apakah G memepunyai suatu bridge

1. Perhatihan graph G seperti ditunjukan gambar berikut

Apakah G mempunyai suatu bridge

**Multigraph yang dapat ditelusuri**

 Definisi:

Sebuah multigraph G dikatakan transversable
 (dapat ditelusuri) jika ada suatu path yang
 memuat semua verteksnya dan menggunakan

 setiap edgenya tepat satu kali.

 Memaknai definisi di atas, berarti path dimaksud

haruslah sebuah trail (karena tidak ada edge yang digunakan dua kali). Inilah trail tranversable dan suatu multigraph terhubung.

Perhatikan contoh berikut

(a)

(b)

Gambar multigraph G (b) di atas menunjukan sebuah trail transversable dari multigraph pada gambar (a)

Masalah jembatan Konigsberg dan pemecahannya

(a) Konigsberg in 1976

(b) Euler’s graphical representation

 Kota konigsberg abad 18 mencakup dua pulau dan tujuh jembatan seperti ditunjukan gambar di atas (a). Pertanyaan: mulai di suatu tempat dan berakhir disuatu tempat, dapatkah seseorang berjalan melewati kota dengan menyebrangi ketujuh jembatan tetapi tidak boleh menyebrangi suatu jembatan sebanyak dua kali? Orang-orang Konigsberg menulis kepada ahli matematika Swiss, L Euler mengenai pertanyaan ini.

Euler membuktikan pada tahun 1736 bahwa perjalanan seperti itu adalah suatu yang tidak mungkin dilakukan. Dia menempatkan kembali pulau-pulau dan dua sisi sungai dengan titik-titik, dan jembatan-jembatan dengan kurva-kurva seperti ditunjukan gambar (b) di atas.

Ini tidak sulit untuk dimengerti bahwa berjalan di Konigsberg adalah suatu yang mungkin jika dan hanya jika multigraph pada gambar (b) di atas dapat ditelusuri (tranversable). Tetapi multigraph ini mempunyai empat verteks ganjil, sehingga tidak transversable).

Jadi seseorang tidak dapat berjalan melalui Konigsberg dengan menyebrangi jembatan tepat satu kali.

Definisi sebuah graph Euler dan Trail Euler:

sebuah graph (multigraph) G adalah graph euler jika terdapat sebuah trail transversabel tertutup yang diberinama trail euler.

Teorema 3 (Euler)

Sebuah grahp terhubung adalah graph euler jika dan hanya jika setiap verteksnya mempunyai derajat genap

Soal Latihan 4

1. Tentukan manakah dari graph seperti yang ditunjukan gambar di bawah ini yang dapat ditelusuri (transversable).

1. Tentukan sebuah trail transversable untuk graph G dimana V(G) = {A, B, C, D} dan
E(G) = [{A,C}, {A,D}, {B,C}, {B,D}, {C,D}]
2. Tunjukan bahwa menambah atau menghapus loop dari sebuah multigraph G akan tetap membuat graph G dapat ditelusuri (transversable) atau tidak dapat ditelusuri
3. Matriks dan Graph

 Misal G adalah sebuah graph dengan verteks-verteks v1, v2, ..., vm dan edge-edge e1, e2, ..., en. maka definisi dari: (a) Matrik adjacency (relasi) dari G;
(b) Matriks incident (terhubung) dari G, diterangkan dalam penjelasan berikut.

 Matriks adjacency.

Misalkan A = (aij) adalah matriks mxm yang didefinikan oleh

Aij = 

Maka A disebut matriks adjacency dari G.

Matriks incident.

Misalkan M = (mij) adalah matrik mxn yang didefinisikan oleh

m = 

 Maka M disebut matriks incidence dari G

Masalah 10

Perhatikan graph G pada gambar berikut (e5 adalah

edge berbentuk lengkung)

 tentukan:

1. Matriks adjacency A = (aij) dari graph G
2. Tentukan matriks incidence M={mij} dari graph G

Solusi:

Untuk (a); Karena G mempunyai lima verteks maka A
 akan menjadi matriks 5x5. aij = 1 jika ada sebuah
 edge antara vi dan vj, dan aij = 0 jika tidak.
 Matriks yang dihasilkan (baris kolom verteks-
 verteks terkait) adalah

 A = 

Untuk (b): karena G mempunyai lima verteks dan
 delapan edge maka M akan menjadi matriks 5x8.
 mij=1 jika verteks vi anggota dari edge ej dan

 tentukan nol untuk lainnya.

Matrik yang dihasilkan (baris verteks-verteks dan
kolom edge-edge) adalah

 M = 

Soal Latihan 5

1. Perhatikan graph G seperti ditunjukan gambar berikut

Tentukan:

1. Matriks adjacency A dari graph G di atas
2. Matriks incidence M dari graph G di atas
3. Tentukan matriks adjacency A dan matriks incidence M dari graph G seperti ditunjukan gambar berikut

1. Graph berlabel Isomorphis dan Homomorphis

 Sebuah graph G dikatakan berlabel jika edge dan atau verteks-verteksnya diberikan berupa data. Khususnya, jika setiap edge e dari G dipetakan kesebuah bilangan tak negatip *l(e)* maka *l(e)* disebut panjang dari *e*

G dan G\* disebut graph isomorphis jika G(V,E) dan G\* (V\*,E\*) adalah graph-graph, dan ada f: V→V\* yang merupakan korespodensi satu-satu antara himpunan verteks sedemikian hingga (u,v) adalah edge dari Gjika dan hanya jika {f(u),f(v)} adalah edge dari G\*

Graph homomorphis dijelaskan sebagai berikut; diberikan suatu graph G, kita bisa mendapatkan sebuah graph baru denngan membagi sebuah edge dari G dengan verteks-vertek tambahan. Dua graph G dan G\* dikatakan homomorphis jika mereka bisa didapatkan dari graph isomorphis dengan metode ini.

**Isomorphisma**

 Isomorfik adalah dua buah benda yang sama tetapi secara geometri bersifat berbeda.

Dua buah graph G1 dan G2 dikatakan mempunyai isomorfisma (isomorfiks), jika terdapat pemetaan satu-satu antara simpul-simpul di G1 dan simpul-simpul di G2, dan dipenuhinya syarat : (1) jumlah busur masing-masing graph sama, (2) jumlah node masing-masing graph sama, (3) terdapat kesesuaian antara busur-busur di dalam kedua graph tersebut

contoh :

Masalah 11

1. Misalkan G adalah graph berlabel seperti

ditunjukan gambar berikut

tentukan path minimum antara A dan D

Solusi:

Terdapat enam path sederhana antara A dan D. path-path tersebut dan panjangnya adalah sebagai berikut;

(A, B, D): 16 (A, C, D): 18

(A,B,C,D): 14 (a,c,b,d): 24

(A,B,E,C,D): 20 (A,C,E,B,D): 30

Jadi  = (A,B,C,D) dan panjangnya 14

1. Gambar menunjukan delapan graph berbentuk hurup abjad.

1. Manakah dari delapan graph tersebut yang isomorphis dengan M
2. Perhatikan huruf-huruf A,F,K,T,X pada gambar di atas. Manakah dari mereka yang isomorphis?

Solusi:

Untuk (a). M terdiri dari lima verteks dalam garis
 tunggal. Jadi V dan Z (dan M sendiri)
 adalah isomorphis dengan M

Untuk (b). huruf F dan T, dan K dan X adalah
 isomorphis

Soal Latihan 6

1. Misalkan G adalah graph berlabel seperti ditunjukan gambar berikut

Tentukan: (a) semua path sederhana antara A dan F
 (b) Path minimum antara A dan F

1. Perhatikan masalah pembelanjaan berikut:

Kamu ingin melengkapi perabotan rumah dan telah memutuskan untuk membeli barang-barang berikut, masing-masing dari toko yang berbeda; (A) sofa dan kursi yang sesuai, (B) meja kopi, (C) permadani, (D) televisi, (E) lampu hias. Ada persyaratan dalam pemesanan agar barang-barang ini dapat dibeli. Pertama, permadani harus dibeli sebelum satu stel sofa dan kursi dan meja kopi (karena perabotan ini harus cocok dengan permadani), kedua lampu hias harus dibeli terakhir karena jika tidak ada uang tersisa pembeliannya bisa ditunda.

Kamu sudah menentukan lama perjalanan (dalam menit) antar toko) dan sudah menyusun informasi ini dalam bentuk graph G seperti ditunjukan gambar berikut

Tentukan sederetan pembelanjaan yang paling

efisien, yaitu menentukan urutan pembelanjaan yang akan meminimumkan perjalanan.

1. Dapatkah sebuah graph berhingga G menjadi isomorphis dengan salah satu subgraphnya (selain dirinya sendiri)?
2. Perhatikan yang ditunjukan gambar berikut

Tujukan bahwa mereka berbeda, yaitu tidak ada dua dari mereka yang isomorphis. Tujukan pula bahwa dua dari mereka adalah homomorphis.

BAB II

GRAPH PLANAR DAN TREE

1. **Graph Planar**

 Sebuah graph atau multigraph yang dapat digambarkan dalam sebuah ruang atau pada permukaan bidang sehingga edge-edgenya tidak bersilangan disebut planar.

 Contoh berikut sebuah gambar dari graph K4

Dan menjadi graph planar, dengan cara merubah reprentasi cukup salah satu diagonalnya menjadi garis lengkung diluar segi-empat.

 Perhatikan graph yang ditunjukan gambar 2.2 berikut:

Gambar 2.2

Gambar 2.2(a) adalah graph, dan digambar kembali menjadi graph planar dalam bentuk gambar 2.2(b)

1. **Pemetaan dan Region**

 Sebuah pemetaan dapat dimaknai sebagai sebuah perwakilan planar khusus dari sebuah multigraph planar terhingga.

Region adalah daerah-daerah terhubung dalam ruang atau bidang hasil bagi sebuah pemetaan.

Derajat dari sebuah region adalah panjang dari sebuah path tertutup yang membatasi r

Teorema 2.1

Jumlah derajat region dari sebuah pemetaan M sama
 dengan dua kali jumlah edge di M.

Bukti: setiap edge e dari pemetaan M akan
 membatasi dua region atau termuat dalam
 sebuah region, dan akan muncul dua kali dalam
 suatu path sepanjang batas region tersebut.
 Sehinnga setiap edge termuat dalam sebuah
 region akan dihitung dua kali dalam menunjukan
 derajar region dari M.

1. **Formula Euler**

 Euler memberi sebuah formula yang menghubungkan jumlah verteks, jumlah edge dan jumlah region dari suatu pemetaan terhubung

Teorema 2.2 (Euler)

Misalkan M adalah suatu pemetaan terhubung dengan verteks V, edge E dan region R. Maka

V – E + R = 2

Bukti: dibahas dalam perkuliahan bersama mahasiswa

1. Graph tidak Planar

 Teorema berikut, menurut Kuratowski, memberi sebuah pengujian sederhana dalam menetukan apakah sebuah graph yang diberikan planar atau tidak.

Teorema 2.3:

Sebuah graph adalah tidak planar jika dan hanya jika ia memuat semua subgraph homorphis K3,3 atau K5

1. **Graph Berwarna**

Sebuah pewarnaan dari graph G adalah sebuah pemetaan warna-warna ke verteks-verteks dari G sedemikian hingga verteks adjacency (verteks relasinya) mempunyai warna yang berbeda.

 Jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai G disebut kromatik dari G yang dilambangkan dengan (G).

Contoh:

Tentukan jumlah kromatik dari graph lengkap K4, K6,
 hingga secara umum Kn.

Solusi: untuk mewarnai graph lengkap K4 diperlukan
 empat warna, K6 enam warna, dan Kn n warna.
 Hal ini karena kita memerlukan warna yang
 berbeda untuk setiap verteksnya.

Algoritma Welch-Powell untuk pewarnaan sebuah
graph G.

Pertama, urutkan verteks-verteks dari G dalam derajat yang menurun. Kemudian gunakan satu warna untuk mewarnai verteks pertama, dan untuk mewarnai, dalam urutan yang berurut, setiap verteks dalam daftar yang tidak berelasi dengan verteks sebelumnya diwarnai dengan warna ini.

Mulai lagi dengan daftar yang paling tinggi dan ulangi proses pewarnaan verteks yang tidak berwarna sebelumnya dengan menggunakan warna kedua.

Terus ulangi dengan menambahkan warna-warna sampai semua verteks telah terwarnai.

Contoh:

Perhatikan graph G dalam gambar berikut:

1. Gunakan algoritma Elch-Powell untuk mewarnai G (mengacu pada warna-warna sederhana seperti “a”, “b” dan seterunya).
2. Tentukan jumlah warna minimum (kromatik)
dari G

Solusi:

Untuk (a). Tuliskan verteks-verteks dari G dalam urutan yang derajatnya menurun. Petakan warna a ke verteks pertama (v1).

Verteks selanjutnya yang tidak berelasi dengan v1 yaitu v7; petakan a ke v7.

Sekarang pindah kewarna b. petakan warna b ke verteks tak berwarna pertama (v4).

Vertek tak berwarna selanjutnya yang tidak berelasi

dengan v4 adalah v2; petakan warna b ke v2.

Karena semua sisa verteks yang tidak berwarna adalah berelasi dengan v4 maupun v2, kita pidah kewarna c.

Ulangi proses ini dengan menambah warna-warna sampai semua verteks-verteks terwarnai.

Berikut hasil pemetaannya.

Verteks v1 v4 v5 v6 v2 v3 v7

Derajat 5 4 4 4 3 3 3

Warna a b c c b d a

Untuk (b). verteks-verteks v1, v3, v4, dan v6 terhubung satu sama lain sehingga harus diwarnai dengan warna-warna berbeda.

Jadi paling tidak empat warna diperlukan untuk mewarnai graph G.

Karena (a) hanya menggunakan empat warna untuk mewarnai G maka (G) = 4

1. **Graph Bipartisi dan Pewarnaan**

 Sebuah graph bipartisi adalah sebuah graph yang verteks-verteksnya dibagi ke dalam dua himpunan bagiann (subset) dimana verteks setiap himpunan bagian terhubung ke semua verteks himpunan bagian lainnya atau bukan kesuatu verteks dalam himpunan bagiannya sendiri.

 Karena tidak ada verteks yang terhubung ke verteks

lainnya dalam himpunan bagian sama maka semua verteks dari sebuah himpunan bagian yang diberikan bisa dipetakan ke warna yang sama. Sehingga dibutuhkan dua buah warna untuk mewarnai suatu graph bipartisi. Dengan demikian, (K3,4) = 2 dan (K2,6) = 2

Teorema 2.4

Pernyataan berikut ekuivalen untuk sebuah graph G

1. G berwarna dua
2. G adalah bipartisi
3. Setiap cycle dari G mempunyai panjang yang genap

Bukti: Dalam perkuliahan bersama mahasiswa

1. **Grap Planar dan Pewarnaan**

Teorema 2.5

Suatu graph planar G adalah berwarna lima

Bukti: ... sda.

1. **Warna dan Pemetaan**

... sda

1. **Tree**

Sebuah tree T adalah sebuah graph terhubung tanpa cycle.

Teorema 2.6

Misalkan G adalah sebuah graph dengan lebih dari satu verteks . Maka pernyataan berikut adalah ekuivalen:

1. G adalah sebuah tree
2. Setiap pasangan verteks terhubung dengan tepat satu path sederhana
3. G terhubung, tetapi jika satu edge dihapus maka graph yang dihasilkan tidak terhubung
4. G adalah bebas cycle, tetapi jika satu edge ditambahkan pada graph maka graph yang dihasilkan mempunyai tepat satu cycle

Teorema 2.7

Misalkan G adalah graph berhingga dengan n > 1 verteks. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. G adalah sebuah tree
2. G adalah bebas cycle dan mempunyai n–1 edge
3. G terhubung dan mempunyai n-1 edge

Teorema 2.8

Tree (dan juga forest) adalah berwarna 2.

1. **. Tree Merentang (Spanning Tree)**

 Pengertian dari tree merentang, diberikan dalam penjelasan berikut:

Sebuah subgraph T dari graph G disebut sebuah tree merentang dari G jika T adalah sebuah tree dan T memuat semua verteks dari G.

Contoh:

Tentukan dua tree merentang untuk graph G seperti

ditunjukan gambar berikut:

Solusi ditunjukan dalam gambar 2.4 berikut

Gambar 2.4

Masalah 12

1. Perhatikan dua buah multigraph seperti ditunjukan gambar berikut:

1. (b)

Kedua gambar yang ditunjukan gambar di atas keduanya adalah sama (isomorphis), hanya pemetaan mereka yang berbeda.

 Untuk setiap pemetaan; tentukan batas dan derajat setiap region, dan buktikan teorema 2.1

Solusi:

Batas setiap region pada

gambar (a) adalah

r1 = (A, B, C, A) r2 = (A, C, B, E, D, E, A) dan
r3 = (A, B, E, A). Jadi deg(r1) = 3, deg(r2) = 6, dan
deg(r3) = 3, dan S = 3+6+3=12 yang diharapkan terdapat enam edge.

Batas setiap region pada

gambar (b) adalah
r1 = (A, B, C, A) r2 = (A, B, E, D, E, A) dan
r3 = (A, C, B, E, A). Jadi deg(r1) = 3, deg(r2) = 5, dan
deg(r3) = 4, dan S = 3+5+4=12 yang merupakan dua kali jumlah edge.

1. Perhatikan tree T pada gambar berikut

1. Manakah verteks yang merupakan tipot dari T
2. Manakah edge yang merupakan jembatan (bridge) dari T

Solusi:

Untuk (a): Setiap verteks yang berderajat lebih dari
 satu merupakan sebuah titik potong pada sebuah
 tree, sehingga; c, r, u, w, dan yadalah titi-titik
 potong dari T

Untuk (b): Setiap edge pada sebuah tree merupakan
 sebuah jembatan karena penghapusan suatu
 edge menghasilkan sebuah tree yang tidak
 terhubung (teorema 2.7)

Soal Latihan 7

1. Perhatikan graph yang ditunjukan gambar berikut:

1. (b) (c)

Manakah graph yang planar?

1. Tentukan derajat setiap region dari pemetaan Q seperti yang ditunjukan gambar berikut, dan buktikan teorema 2.1

1. Perhatikan kembali gambar pada soal nomor 2. Kemudian tcycle atau path tertutup yang membatasi setiap region dari pemetaan Q di atas.
2. Tentukan jumlah verteks V, edge E dan region R dari setiap pemetaan pada gambar di bawah, dan buktikan teorema 2.1

1. (b)
2. Perhatikan barisan pemetaan terhubung yang ditunjukan gambar di bawah. Setiap pemetaan dalam barisan didapatkan dari pemetaan sebelumnya dengan cara (1) menambahkan sebuah verteks dan menghubungkannya kepemetaan lain dengan sebuah edge dengan tidak menyilang edge yang lain atau (2) menghubungkan dua buah verteks dengan sebuah edge yang tidak menyilang edge yang ada. Buktikan formula Euler untuk setiap peetaan dalam barisan.

1. Graph yang ditunjukan gambar di bawah mempunyai sebuah subgraph yang isomorphis dengan K5. Tentukan subgraph terbut.

1. Perhatikan graph G berikut

1. (b)

 Gunakan algoritma Welch-Powell untuk mewarnai graph (a) dan (b) di atas.

1. Perhatikan graph bipartisi K2,4 seperti ditunjukan gambar berikut:

Tentukan:

1. Sebuah graph dua warna
2. Enam cycle yang mulai dengan v1 dan menunjukan bahwa mereka genap.
3. Tentukan sebuah dua pewarnaan dari tree T yang masing-masing ditunjukan gambar (a) dan

 gambar (b) berikut

1. (b)
2. Misalkan ada dua buah path sederhana yang berbeda, misal P1 dan P2 dari sebuah verteks u ke sebuah verteks v dalam sebuah graph G seperti ditunjukan gambar berikut:

Buktikan bahwa G mengandung sebuah cycle.

1. Graph bernilai G seperti ditunjukan gambar mempunyai tiga tree merentang:

1. Tentukan tree merentang dari G dan panjang-panjangnya
2. Manakah yang merupakan tree merentang minimum dari G?

BAB III

ANALISIS KOMBINASI

1. **Konsep perhitungan, notasi faktorial**

Ilmu kombinatorik ditujukan untuk mengetahui perkiraan jumlah operasi komputasi untuk mengetahui waktu proses dan besar kapasitas data. Kombinatorial adalah cabang matematika yang mempelajari pengaturan objek-objek.

Kaidah Dasar perhitungan kombinatorial, adalah sebagai berikut :

1) Perhitungan Secara Langsung

a) Kaidah Penjumlahan *(m + n)*

Bilapercobaan kesatu mempunyai *m* hasil percobaan yang mungkin terjadi, percobaan kedua mempunyai *n* hasil percobaan yang mungkin terjadi. Makabila hanya satu percobaan yang dilakukan akanterdapat *m + n* kemungkinan hasil percobaan.

Contoh :

Sekelompok mahasiswa terdiri dari 4 pria dan 3 wanita. Jumlah cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut, adalah 4 + 3 = 7 cara

b) Kaidah Perkalian *(m x n)*

Bilapercobaan kesatu mempunyai *m* hasil percobaan yang mungkin terjadi, percobaan kedua mempunyai *n* hasil percobaan yang mungkin terjadi. Makabila percobaan kesatu dan kedua akanterdapat *m x n* kemungkinan hasil percobaan.

Contoh :

Sekelompok mahasiswa terdiri dari 4 pria dan 3 wanita. Jumlah cara memilih satu wakil pria dan satu wakil wanita, adalah 4 x 3 = 12 cara

c) Perluasan rumusan a) dan b)

Percobaan untuk nomor a) dan b) tidak terbatas hanya dua percobaan, tetapi lebih dari dua percobaan. *p1 + p2 + p3 + .. + pn*

 *p1 x p2 x p3 x .. x pn*

Contoh :

Terdapat 6 buku bahasa Inggris, 3 buku bahasa Perancis dan 10 buku bahasa Indonesia.

a) Jumlah cara memilih 3 buku dengan bahasa berbeda, adalah 6 x 3 x 10 = 180

b) Jumlah cara memilih 1 buku secara sembarang, adalah 6 + 3 + 10 = 18

Masalah 13

 Misalkan sebuah pelat nomor memuat dua huruf dan

diikuti oleh tiga angka dengan digit pertamanya tidak nol. Maka banyak pelat nomor berbeda yang dapat dicetak?

Solusi: karena setiap hurup dapat dicetak dalam 26 cara
 berbeda, digit pertama dalam 9 cara berbeda dan
 dua digit lainnya dalam 10 cara berbeda. Maka
 terdapat 26 . 26 . 9 . 10 . 10 = 604800 pelat
 nomor berbeda yang dapat dicetak.

Masalah 14

 Jumlah n pelat nomor yang dapat dibuat dengan, setiap pelat memuat dua hurup berbeda diikuti tiga digit angka yang berbeda?

Solusi: Ada 26 pilihan berbeda untuk huruf pertama dan
 25 pilihan untuk huruf kedua, sementara digit
 pertama 10 pilihan berbeda kedua 9 dan ketiga
 8. Maka n = 25.25.10.9.8 = 468000; bagaimana?

**Fungsi Faktorial**

Fungsi faktorial n! (baca “n faktorial”)

 n! didefinisikan dengan; n! = 1 . 2 . 3 . ... . (n-2)(n-1)n

 0! Didefinisikan sama dengan 1

Masalah 15

 Tulis dalam bentuk faktorial:

1. n(n-1) ... (n-r+1), (b) . Solusi:
2. n(n-1)...(n-r+1) =
  =
 
3. = n(n-1)...(n-r+1)=
  = 

**2. Koefisien Binomial**

Simbol  dibaca “n kombinasi r” sama dengan C(n,r) dibaca pemilihan r objek dari n objek yang ada, dengan r dan n adalah bilangan bulat positif dan r ≤ n, didefinisikan sebagai = 

 Perhatikan bahwa terdapat r faktor dalam pembilang dan penyebut. Angka-angka ini disebut koefisien binomial.

Teorema: jika a,bR dan nZ+ maka:

 (a+b)n= C(n,k)an-kbk

Contoh 1: Hitunglah 

Solusi:  =  = 560

Contoh 2: (a+b)n dapat dijabarkan sebagai

(a+b)n= C(n,0)an-0b0+C(n,1)an-1b+...+C(n,n)an-nbn.

Maka (a+b)4 dapat dijabarkan sebagai

(a+b)4=C(4,0)a4-0b0+C(4,1)a4-1b+C(4,2)a4-2b2+
 C(4-3)a4-3b3+C(4-4)a4-4b4

 = a4 + 4a3b + 6a2b2 + 4ab3 + b4

Dan kita dapat mengatakan;

6 adalah koefisien dari a2b2

**3. PERMUTASI**

Permutasi adalah penyusunan objek-objek dalam suatu urutan tertentu.

Prinsip Dasar Penghitungan Permutasi :

1) Setiap unsur dari *n* unsur, dapat dipilih sebagai unsure pertama sehingga terdapat n cara untuk memilih unsure pertama

2)Jika unsur pertama itu sudah dipilih, maka setiap dari sisanya, yaitu *(n-1)* unsur dapat dipilih sebagai unsur kedua, terdapat *(n-1)* cara untuk memilih unsur kedua

*3)* Untuk memilih unsur ketiga, yaitu *(n-2)* cara. Dan untuk menempatkan unsur kesatu dan kedua ada : n. (n-1) . (n-2), sehingga didapat : Pn = P (n,n) = n . (n-1) . (n-2) ... 3 . 2 . 1! = n!

Teknik perhitungan permutasi :

1. Permutasi dari keseluruhan n unsur

Jika *n* bilangan bulat positif, maka hasil perkalian

bilangan tersebut dari 1 s/d n disebut *n faktorial*

P(n,n) = n!

1. Permutasi dari sebagian objek berbeda, dimana tidak semua objek tersebut digunakan.

Jumlah permutasi dari suatu himpunan yang terdiri dari *n* objek yang berbeda dan yang diambil sekaligus sebanyak *r* objek tanpa pengulangan.

 P(n,r) = 

1. Permutasi dengan pengulangan

Terdapat n pangkat r cara untuk menyusun r objek ke dalam n objek berbeda.

 P(n,r) = nr

**4.KOMBINASI**

Kombinasi adalah suatu subset pilihan dari

objek-objek tanpa menghiraukan urutan objek

yang bersangkutan.

Teknik Penghitungan Kombinasi :

1. Kombinasi dari seluruh objek yang berbeda

Jumlah kombinasi dari suatu set yang terdiri dari *n* objek yang berbeda dan diambil sebanyak *n* objek, maka akan sama dengan 1.

 C(n,r) = 1!

1. Kombinasi dari *n* objek yang berbeda, dipilih *r* objek tanpa menghiraukan susunannya, dengan
syarat : 0 < r < n

C(n,r) = 

1. Kombinasi dengan pengulangan “Masalah pengambilan *r* objek dari i benda yang berbeda dengan membolehkan pengambilan berulang, dapat dipandang sebagai penggunaan *r* tanda yang sama untuk menandai *n* benda yang berbeda, dan setiap benda dapa ditandai lebih dari satu kali.

C(n+r-1,r) = (n+r-1) !

 r!(n-1)!

Contoh soal :

1) Sebuah bioskop mempunyai jajaran kursi per baris. Tiap baris terdiri dari 6 kursi. Jika dua orang akan duduk, berapa banyak pengaturan tempat duduk yang mungkin pada satu baris?

Solusi:

 P(6,2) = 6! = 6! = 6.5.4.3.2.1! = 6 . 5 = 30

 (6-2)! 4! 4 . 3 . 2 . 1!

2) Terdapat perlombaan lari dengan jumlah peserta tujuh

orang. Berapa kemungkinan peserta mendapatkan medali.

Solusi:

P(7,3) = 7! = 7! = 7. 6.5.4.3.2.1! = 7 . 6 . 5 = 210

 (7-3)! 4! 4 . 3 . 2 . 1!

3)P(n,4) = 110. P(n-2,2) , n?

Solusi:

n ! = 110 . (n-2)!

 (n-4)! (n-4)!

n.(n-1).(n-2)! = 110 . (n-2)!

 (n-4)! (n-4)!

 n(n-1)=110

 n2-n-110 = 0

 (n-11)(n+10) = 0

 n = 11, n = -10

1. **RELASI BERULANG**

 Relasi berulang mendefinisikan sebuah barisan

dengan memberikan nilai ke-n yang dikaitkan dengan suku-suku sebelumnya.

 Untuk mendefinisian sebuah barisan, relasiulang memerlukan nilai awal yang sudah ditentukan. Dan secara formal relasi berulang didefinisikan sebagai

Sebuah relasi berulang untuk barisan a0, a1, ... merupakan sebuah persamaan yang mengaitkan an dengan a0, a1, ..., an. Syarat awal untuk barisan a0, a1, ... adalah nilai-nilai yang diberikan secara eksplisit pada beberapa suku dari barisan tersebut.

Contoh:

Untuk barisan 3, 7, 11, 15, ...

Disefinikan denga relasi berulang sebagai

an = an-1 + 4, a ≥ 1 dan syarat awal a0 = 3

Soal latihan 8

1. Terdapat koleksi buku : 4 buku basis data,

3 buku matematika, dan 6 buku pemrograman

a) Berapa kemungkinan dapat dipilih 2 buku dengan tema berbeda

b) Berapa kemungkinan terambil 3 buku dengan salah satunya adalah buku permrograman

2) Berapa kemungkinan 5 digit angka genap dapat

 disusun, dengan syarat digit pertama adalah angka ganjil dan tidak terjadi pengulangan.

3) ) P(n,4) = 9 . P(n,3), n = ?

4) P(n,r) = 336

C(n,r) = 56 , n?, r?

4) P (n,r) = 6720

C(n,r) = 56, n?, r?

5) P(n,r) = 60

C(n,r) =10, n?, r?

6) P(n,r) = 840

C(n,r) =35 , n?, r?

7) Diketahui himpunan bilangan {1, 2, 3, 5, 8, 9}. Berapa banyak kemungkinan bilangan terdiri dari 5 digit, dengan ketentuan digit ke-3 selalu ganjil

8) 2 . C (9,r) = 3. C(8,r), r?

9) Tentukan banyak m panitia terdiri dari 3 orang yang dapat dibentuk dari 8 orang

10) Dari sekelompok kecil pemuda sebuah kampung yang terdiri dari tujuh orang laki-laki dan lima orang perempuan. Tentukan banyaknya panitia yang terdiri dari: a) lima orang b) tiga orang pria dan dua orang wanita c) paling sedikit satu pria dan satu wanita.

11) Seorang pedagang untuk memenuhi pesanan yang disanggupinya membeli 3 ekor sapi jantan, 2 ekor kambing jantan, dan 4 ekor ayam jantan dari seseorang yang mempunyai enam ekor sapi jantan, lima ekor kambing jantan, dan delapan ekor ayam jantan. Berapa banyak pilihan yang dipunyai pedagang dimaksdu?

12) Tentukan koefisien dari x2y3z5 dalam penjabaran (x+y+z)10

13) Tentukan koefisien dari a5b6 dalam penjabaran (a+b)11

14) Diketahui barisan bilangan seperti berikut: 1, 1, 2, 4, 16, 128, 4096, ... . Tentukan relasi berulang dan yarat awalnya.

15) selesaikan relasi berulang an = an-1 + 4, n ≥ 1 dengan syarat awal a0 = 3

16) Uang satu juta rupiah didepositokan dengan bunga 12% per tahun. Jika an menyatakan jumlah uang pada akhir tahun ke n, carilah relasi berulang dan syarat awalnya.

17) Di Kota bandung kode plat nomor kendaraan diwali hurup D selanjutnya diikuti nomor plat yang terdiri dari angka: satu digit, dua digit, tiga digit, empat digit dan kode ekstension yang terdiri dari satu hurup, dua hurup atau tanpa kode ekstension. Maka banyak cara menyusun angka yang mungkin terjadi pada plat nomor kendaraan di kota tersebut?

BAB IV

REFERENSI TAMBAHAN

**Enumerasi Pohon**

 Suatu graph G(V,E) adalah suatu sistem terdiri dari himpunan V yang tak kosong dan hingga dan himpunan E dari pasangan-pasangan tak-terurut {a,b} dengan a, b ϵ V dan a ≠ b. himpunan V disebut himpunan titik dan anggotanya disebut titik. Sedangkan himpunan E biasanya disebut himpunan sisi dari graph G dan angotanya disebut sisi. Sisi {a,b} biasa ditulis ab.

Bila │V│= n maka graph G dikatakan mempunyai orde n. Bila sisi s = ab pada graph G maka titik a dan b berturut-turut dikatakan titik ujung s, sedangkan sisi s dikatakan menempel pada titik a dan b. Sisi s juga dikatakan menghubungkan titik a dan b. untuk setiap titik v di graph G, derajat titik v, dinotasikan dengan v, adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v di G.

Sebuah jalan J dari titik v ke w dengan panjang k pada suatu graph adalah suatu barisan titik
v = v0, v1, v2, ..., vk-1, vk = w
sedemikian sehingga v0v1, v1v2, ..., vk-1vk
merupakan sisi-sisi pada graph G. Bila v = w, maka jalan J disebut tertutup. Bila jalan J tersebut mempunyai jalan berbeda maka J disebut trail. Selanjutnya, bila jalan J mengandung titik-titik yang semuanya berbeda maka J disebut lintasan (path). Suatu lingkaran Cn adalah trail tertutup dengan n titik berbeda.

Graph G dikatakan terhubung jika setiap pasang titik x dan y di G selalu ada lintasan dari x ke y di graph G. Bila tidak demikian graph G dikatakan tidak terhubung.

Pohon dimaksudkan sebagai graph khusus, yakni graph terhubung yang tidak mempunyai lingkaran.

Cayley (1889) yang pertama kali menyatakan bahwa banyaknya pohon dengan n titik adalah nn-2 (dengan menunjukannya untuk n = 6).

Teorema 4.1 (Cayley)

Untuk n  2, maka banyaknya pohon dengan n titik
 adalah nn-2

Bukti: Dibahas dalam perkuliahan bersama Mahasiswa

**Soal-soal**

1. Perhatikan gambar berikut

Bila A adalah titik sudut kiri bawah dan B titik sudut paling kanan atas, maka berapa banyak rute terpendek dari A ke B?

1. Ada berapa bilangan 10- digit berbeda yang dapat dibentuk angka-angka 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, dan 1 ?
2. Banyak solusi untuk x1 + x2 + x3 + x4 = 6,

bila setiap xi adalah bilangan bulat non negatif?

1. Berapa banyak pohon dapat dibangun dengan 4 titik?
2. Tunjukan bahwa di dalam suatu grup dengan 6 anggota akan ada 3 nggota yang saling kenal satu sama lainnya atau 3 anggota yang saling tidak kenal satu sama lainnya.
3. Tentukan banyaknya penyelesaian (bilangan bulat) untuk x1+x2+x3 = 10, jika 0≤x1≤5, 1≤x2≤8, dan x3≥0

Pokok-pokok kajian yg menjadi tugas kelompok:

1. Prinsip Induksi
2. Prinsip sarang burung merpati
3. Rekrusif

Ctt: kel. 1: delapan prima pertama

 Kel. 2: delapan ganjil pertama n genap pertama

 Kel. 3: delapan genap berikutnya

 Kel.4: sisanya.

**Daftar Rujukan**

Biggs, N. L., E.K. Lloyd, and R.Jl Wilson (1977) Graph
 Theori 1736-1936. Oxford University Press, Oxford

Graver, J.E., and M.E. Watkins (1977). Combinatorics
 with Emphansis on the Theori of Graph. Springer
 Verlag, New York.

 Munir, Rinaldi. (2004). Bahan Kuliah IF5054 Kriptografi.
 Departemen Teknik Informatika, Institut Teknologi
 Bandung.