INDUKSI MATEMATIK

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

14 September 2020

PENDAHULUAN

Induksi matematik merupakan salah satu metode pembuktian yang baku di dalam matematika, yang menyatakan kebenaran dari suatu pernyataan tentang semua bilangan asli atau kadang-kadang semua bilangan bulat. Metode pembuktian ini sangat penting dalam matematika.

Beberapa Prinsip Induksi Matematik (PIM) yang perlu diketahui:

- Sederhana
- Yang dirampatkan (*generalized*)
- Kuat

1. Prinsip Induksi Sederhana

Misal $P(n)$ adalah suatu proposisi (pernyataan) tentang bilangan bulat positif. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan $P(n)$ benar, cukup ditunjukkan:

i. $P(1)$ benar,

ii. Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap n ≥ 1,

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif *n*.

Tahap (i) dalam pembuktian disebut **basis induksi,** sementara tahap (ii) disebut **langkah induksi.** Asumsi yang dikemukakan dalam tahap (ii) disebut sebagai **hipotesis induksi.**

Contoh 1.1:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa:

$$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti :

Misalkan $P(n): 1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, untuk semua $n \geq 1$.

Basis Induksi:

Untuk $n=1$:

Ruas kiri: $1(2)=2$, dan Ruas kanan: $\frac{1(2)(3)}{3}=2$

Karena ruas kiri = ruas kanan = 2, maka $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis induksi: Andaikan $P(n)$ benar, yaitu

$$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu:

$$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}\\ &= \frac{(n+1)\{n(n+2)+3(n+2)\}}{3}\\ &= \frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ juga benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 1.3:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa $2^{2n}-1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: $2^{2n}-1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Basis Induksi:

Untuk $n=1$: $2^{2(1)}-1=4-1=3$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3. Jadi $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: andaikan $P(n)$ benar, yaitu $2^{2n}-1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}^{+}$, sehingga $2^{2n}-1=3k$.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu $2^{2(n+1)}-1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)}-1 &= 2^{2n+2}-1 \\ &= 4.2^{2n}-1 \\ &= (3+1)2^{2n}-1 \\ &= 3.\left(2^{2n}\right)+\left(2^{2n}-1\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan hipotesis induksi, $\left(2^{2n}-1\right)$ habis dibagi 3 dan $3.\left(2^{2n}\right)$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3, sehingga jumlah $3.\left(2^{2n}\right)$ dan $\left(2^{2n}-1\right)$ juga habis dibagi 3. Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Cara lain untuk langkah induksi:

Karena $2^{2n} - 1 = 3k,\ k \in \mathbb{Z}^+$, maka $2^{2n} - 1 = 3k \Rightarrow 2^{2n} = 3k + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 1 &= 2^{2n+2} - 1 \\ &= 4.2^{2n} - 1 \\ &= 4(3k+1) - 1. \\ &= 12k + 3 \\ &= 3(4k+1) \end{aligned}$$

Karena $3(4k+1)$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Soal-soal Latihan

Buktikan pernyataan berikut ini dengan menggunakan induksi matematik

1. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n\geq 1$.

2. $1+a+a^2+\ldots+a^n=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$, untuk semua $n\geq 0$ dan $a\neq 1$.

3. $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$, $n\geq 1$.

4. $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n(3n-1)}{2}$, $n\geq 1$.

5. $2^2+4^2+\ldots+(2n)^2=\left(\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}\right)^2$, $n\geq 1$.

6. (a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, untuk setiap bilangan asli n.

   (b) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, untuk setiap bilangan asli n.

   (c) Gunakan hasil pada soal (a) dan (b) untuk menyatakan bahwa

   $$(1+2+3+\ldots+n)^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3,\text{ untuk semua } n\geq 1.$$

7. $n^2 + n$ habis dibagi 2, untuk $n \geq 1$.

8. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk $n \geq 1$.

9. $8^n - 3^n$ habis dibagi 5, untuk $n \geq 1$.

10. $5^n - 1$ habis dibagi 4, untuk $n \geq 1$.

11. $n^3 + 5n$ habis dibagi 6, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

12. $7^n - 2^n$ habis dibagi 5, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

13. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ habis dibagi 9, untuk $n \geq 1$.

14. $10^{n+1} + 10^n + 1$ habis dibagi 3, untuk $n \geq 1$.

DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.

Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press:


THANK
YOU!