INDUKSI YANG DIRAMPATKAN

DR. RIPPI MAYA, M.PD.

PERTEMUAN KE-2
21 SEPTEMBER 2020

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misal $P(n)$ adalah proposisi (pernyataan) tentang bilangan bulat. Akan dibuktikan $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Untuk membuktikan $P(n)$ benar, cukup ditunjukkan:

1. $P(n_0)$ benar
2. Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$,

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$

Contoh 1:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa $n! > 2^n$, untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Bukti:

Misal *P*(*n*): $n! > 2^n$, untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$

Basis induksi:

Untuk n = 4:

4! = 24 dan 2^4 = 16, sehingga $4! > 2^4$. Jadi P(4) benar.

Langkah induksi:

Andaikan $P(n)$ benar, yaitu $n! > 2^n$ untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ juga benar yaitu $(n+1)! > 2^{(n+1)}$.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1)\,n! \\
&> (n+1)\,2^n && (\text{berdasarkan hipotesis induksi}) \\
&> 2.2^n = 2^{n+1} && (\text{karena } n \geq 4 \text{ maka } (n+1) \geq 5 > 2)
\end{aligned}
$$

Jadi $(n+1)! > 2^{(n+1)}$. Dengan kata lain $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 4$.

Kesimpulan:

Karena $P(4)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 4$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Contoh 2:

Buktikan bahwa $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$.

Basis induksi:

Untuk $n = 5$: $\left.\begin{array}{l} 2^5 = 32 \\ 5^2 = 25 \end{array}\right\} \therefore 2^5 > 5^2$. Jadi $P(5)$ benar.

Langkah induksi:

Andaikan $P(n)$: $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$ benar (hipotesis induksi)

Akan dibuktikan bahwa $P(n+1)$ benar, yaitu $2^{n+1} > (n+1)^2$

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$2^{n+1} = 2.2^n > 2.n^2 = n^2 + n^2$ (berdasarkan hipotesis induksi)

$> n^2 + 5n = n^2 + 2n + 3n$ (karena $n \geq 5 \Rightarrow n^2 \geq 5n$)

$> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ (karena $n \geq 5 \Rightarrow 3n \geq 15 > 1$).

Jadi $2^{n+1} > (n+1)^2$. Dengan kata lain, $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 5$.

Kesimpulan:

Karena $P(5)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 5$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 5$.

Latihan 1.7:

Sebuah toko buku menjual amplop dalam paket yang berisi 5 amplop dan 7 amplop. Fatimah akan membeli n amplop. Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk setiap $n \geq 24$, toko buku ini dapat memenuhi pesanan tepat n amplop. Asumsikan bahwa persediaan untuk setiap paket amplop tidak terbatas.

Bukti:

Misalkan $P(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa untuk membeli (memesan) amplop sebanyak n ($n \geq 24$), diperlukan paket amplop berisi 5 amplop dan 7 amplop.

Basis induksi:

Untuk $n = 24 \rightarrow 2(5) + 2(7) = 24$.

Artinya untuk membeli amplop sebanyak 24, diperlukan 2 paket amplop berisi 5 amplop dan 2 paket amplop berisi 7 amplop. Jadi $P(24)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi : Misalkan $P(n)$ benar.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar.

Ada dua kemungkinan solusi:

1) Misalkan Fatimah akan memesan amplop sebanyak n amplop, maka ia sedikitnya akan menerima 1 paket amplop berisi 7 amplop. Dengan mengganti 2 paket berisi 7 amplop dengan 3 paket berisi 5 amplop akan diperoleh amplop sebanyak $n+1$ amplop.
2) Misalkan untuk memesan amplop sebanyak n amplop ($n \geq 24$), tidak ada paket amplop berisi 5 amplop, hanya paket amplop berisi 7 amplop yang tersedia. Maka dengan mengganti 4 paket amplop berisi 5 amplop dengan 3 paket amplop berisi 7 amplop, akan diperoleh amplop sebanyak $n+1$ amplop.

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 24$.

Kesimpulan:

Karena $P(24)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 24$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 24$. Jadi untuk memesan amplop sebanyak n amplop, cukup dilakukan dengan memesan paket yang berisi 5 amplop dan amplop saja.

Latihan 1.8:

Untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 8)$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen saja. Buktikan pernyataan tersebut dengan induksi matematik.

Bukti:

Misal: $P(n)$: untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 8)$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen.

Basis Induksi:

Untuk $n = 8$: $8 = 1(3) + 1(5)$. Artinya untuk membayar perangko senilai 8 sen dapat digunakan 1 perangko 3 sen dan 1 perangko 5 sen. Jadi $P(8)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi : Misalkan $P(n)$ benar.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar.

Ada dua kemungkinan solusi:

1) Misalkan kita bayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya 1 perangko 5 sen. Dengan mengganti 1 perangko 5 sen dengan 2 perangko 3 sen akan diperoleh biaya pos senilai $n+1$.

2) Misalkan untuk biaya pos senilai n sen ($n \geq 8$) dengan sedikitnya 3 perangko 3 sen. Dengan mengganti 3 perangko 3 sen dengan 2 perangko 5 sen akan diperoleh biaya pos sebesar $n+1$ sen.

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 8$.

Kesimpulan:

Karena $P(8)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 8$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 8$. Jadi untuk semua $n \geq 8$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen untuk membayar biaya pos.

Soal-soal Latihan

1. Sebuah kios penukaran uang hanya mempunyai pecahan uang senilai Rp. 2000,00 dan Rp. 5.000,00. Untuk uang senilai berapa saja yang dapat ditukar dengan kedua pecahan uang tersebut? Buktikan kebenaran jawaban anda dengan menggunakan induksi matematik.
2. Buktikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 20$) selalu dapat digunakan perangko 5 sen dan perangko 6 sen saja.
3. Buktikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 14$) selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 8 sen saja.

DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.

Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press: