BAB 2
Prinsip Penghitungan

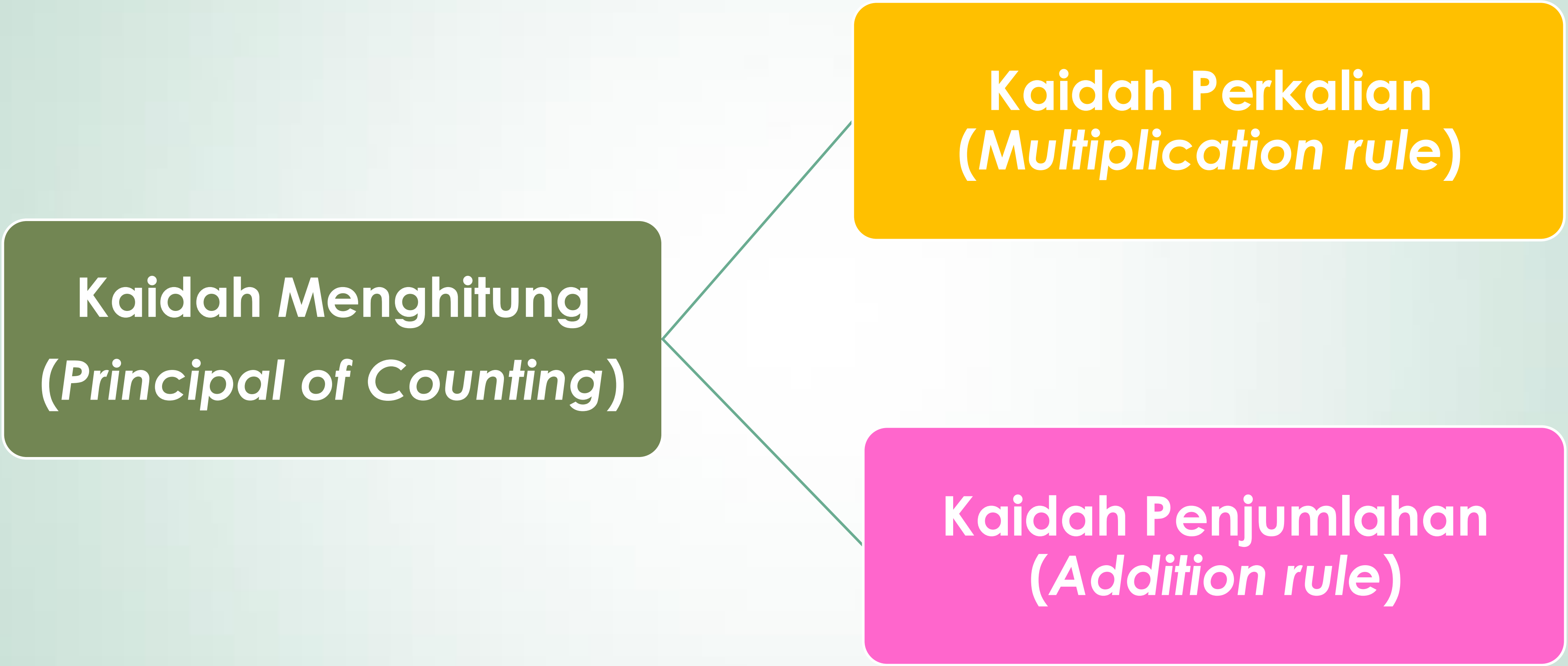
Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Semester 5
Tahun Akademik 2020-2021

Pembahasan:

- Kaidah Penjumlahan dan Perkalian
- Prinsip Inklusi Ekslusi
- Prinsip Sarang Burung Merpati

1. Kaidah Penjumlahan dan Perkalian

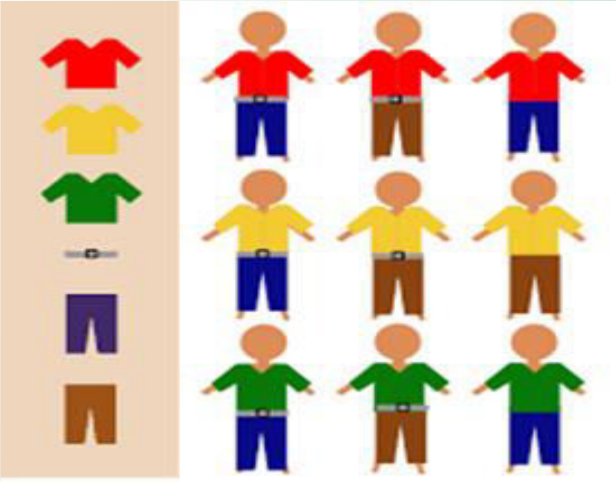


Kaidah Perkalian

Misalkan ada barisan dari r kejadian E_1, E_2, … E_r sedemikian sehingga:

1. Ada n_i cara di mana E_i muncul (i = 1,2, … , r)
2. Banyaknya cara suatu kejadian dalam barisan dapat terjadi tidak bergantung pada bagaimana kejadian dalam barisan sebelumnya terjadi. Dengan kata lain, dua kejadian itu bebas satu sama lain

Maka ada $(n_1).(n_2)…(n_r)$ cara di mana semua kejadian dalam barisan tersebut terjadi.



Contoh:

Ada 5 karakter yang terdiri dari dua huruf yang diikuti dengan 3 angka, yang muncul di belakang series mikrokomputer buatan salah satu pabrik elektronik. Berapa banyaknya kemungkinan pengaturan karakter dalam series tersebut jika:

a. Karakternya dapat diulang

b. Hurufnya tidak dapat diulang

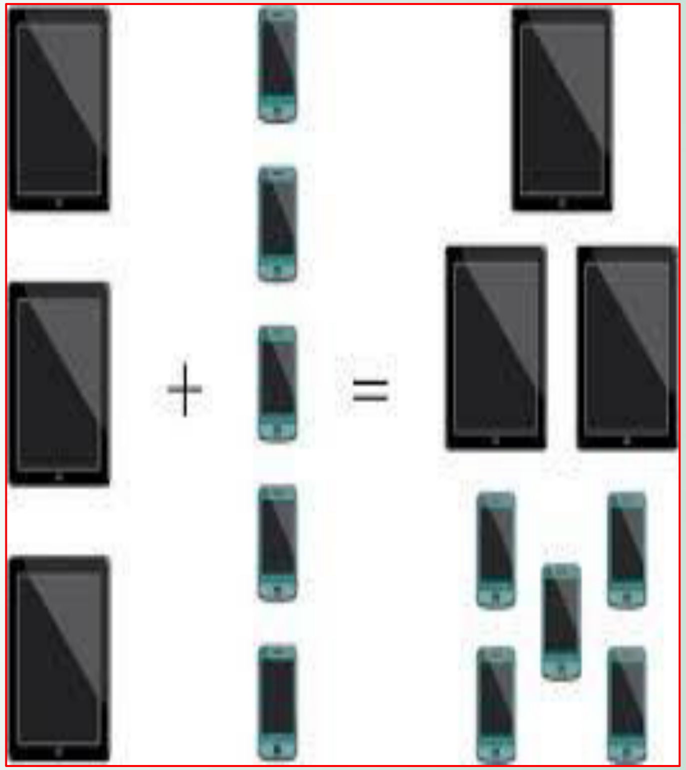
c. Tidak ada karakter yang dapat diulang

Kaidah Penjumlahan

Misalkan ada r kejadian E_1, E_2, … E_r sedemikian sehingga:

1. Ada n_i hasil untuk E_i (i= 1,2,…,r) dan
2. Dua kejadian tidak dapat terjadi secara bersamaan.

Maka ada (n_1) + (n_2) + … + (n_r) cara di mana salah satu kejadian dapat muncul (terjadi).



Contoh:

Seorang dosen mempunyai 25 mahasiswa di kelas Kalkulus dan 31 mahasiswa di kelas statistik. 13 mahasiswa dari dosen tersebut mengikuti 2 kuliah. Berapa banyak kejadian yang muncul dari kejadian ini jika:

1. Seorang mahasiswa dipilih secara acak yg mengikuti kuliah Kalkulus tapi bukan Statistik
2. Seorang mahasiswa dipilih secara acak yg mengikuti kuliah Statistik tapi bukan Kalkulus
3. Seorang mahasiswa dipilih secara acak yg mengikuti kuliah Kalkulus dan Statistik

Latihan

1. Tentukan banyaknya bilangan bulat ganjil dari 0 sampai 99.
2. Soal sama dengan no 1 tapi digit yang berbeda
3. Tentukan banyaknya bilangan genap dari 100-999 yang tidak mempunyai pengulangan digit, jika
   a. Digit terakhirnya adalah nol
   b. Digit terakhirnya bukan nol
4. Soal sama dengan no 3 tapi kasus b dipecah
   a. Digit tengahnya adalah nol
   b. Digit tengahnya bukan nol

Lanjutan

5. Soal sama dengan no 3, tetapi penyelesaiannya dibagi dalam 4 kasus:
   a. Dua digit pertama genap
   b. Dua digit pertama ganjil
   c. Digit pertama genap, digit ke-dua ganjil
   d. Digit pertama ganjil, digit ke-dua genap

2. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Proposisi:

Misalkan himpunan A dan B adalah subset dari himpunan berhingga U. Maka

(a) $|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |A| + |B| - |A \cap B|$

(b) $|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| \leq \min\{|A|, |B|\}$

(c) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| \geq |A| - |B|$

(d) $|\mathrm{A}^{c}| = |U| - |A|$, dengan U adalah himpunan semesta

(e) $|\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}| = |\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|$

(f) $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |A| \times |B|$

Prinsip Inklusi Eksklusi:

Diketahui sejumlah berhingga himpunan berhingga $A_1, A_2, \ldots, A_n$ banyaknya elemen dalam gabungan himpunan berhingga tersebut adalah

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \sum_{i}\left|A_i\right| - \sum_{i<j}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{i<j<k}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + \left(-1\right)^{n+1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

Catatan:

Fungsi Bawah (*The Floor Function*)

Untuk suatu bilangan real x, batas bawah dari x ditulis $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, yaitu bilangan bulat tunggal $\lfloor x \rfloor$ yang memenuhi $x-1<\lfloor x \rfloor \leq x$

Contoh:

$\lfloor 3,05 \rfloor = 3$

$\lfloor 2,95 \rfloor = 2$

$\lfloor 4 \rfloor = 4$

$\lfloor -5,17 \rfloor = -6$

$\lfloor -1,87 \rfloor = -2$

Latihan 1

Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 300 yang:

a. Habis dibagi paling sedikit salah satu dari 3, 5, atau 7
b. Habis dibagi 3 dan 5, tetapi tidak habis dibagi 7
c. Habis dibagi 5, tetapi tidak habis dibagi 3 maupun 7

Latihan 2

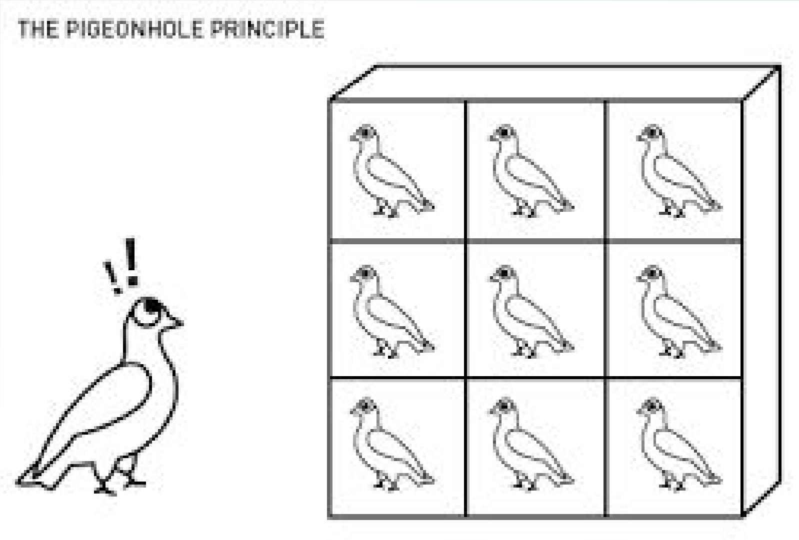
Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 500 yang

a. Habis dibagi 3 atau 5
b. Habis dibagi 3 tetapi tidak oleh 5 atau 6

3. Prinsip Sarang Burung Merpati
(*Pigeon-hole Principles*)

Teorema 3.1

Jika n + 1 atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka paling sedikit ada lebih dari 1 burung merpati di dalam sarang burung tersebut.


THE PIGEONHOLE PRINCIPLE
!!

Teorema 3.1 (Versi lain I)

Jika n + 1 atau lebih objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek

Teorema 3.1 (Versi lain II)

Jika n objek ditempatkan di dalam m buah kotak dan $n > m$, maka paling sedikit satu kotak berisi dua atau lebih objek.

Contoh:

1. Dari 13 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada bulan yang sama.
2. Dari 32 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada tanggal yang sama
3. Dalam sebuah turnamen sepakbola (turnamen *round-robin*), setiap tim bermain melawan tim lainnya tepat satu kali. Misalkan setiap tim menang minimal sekali. Maka ada paling sedikit 2 tim yang menang sekali. Jika ada n tim, maka banyaknya kemenangan untuk setiap tim adalah 1 atau 2 atau 3 atau (n-1). Bilangan n-1 kemenangan ini berhubungan dengan n-1 sarang burung, sementara n tim berhubungan dengan burung merpati. Jadi palingsedikit ada dua tim yang ada di sarang burung yang sama. Dengan kata lain, tim-tim tersebut mempunyai jumlah kemenangan yang sama

4. Diketahui 10 bilangan bulat positif yang kurang dari 107. dari sepuluh bilangan tersebut dibuat subset-subset, baik yang saling lepas maupun tidak. Tunjukkan bahwa ada dua subset yang saling lepas dari subset-subset tersebut yang jumlah elemen di dalam subsetnya sama.
5. Buktikan bahwa dari 5 titik yang dipilih dari sebuah persegi yang panjang sisi-sisinya 2, ada 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling banyak akar 2

Teorema 3.2: Prinsip sarang burung secara umum

Jika kn + 1 atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka akan ada lebih dari k burung merpati dalam paling sedikit satu sarang burung, dengan k bilangan bulat positif.

Teorema 3.3: Prinsip sarang burung yang dirampatkan

Jika M objek ditempatkan ke dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\lceil M/n \rceil$ objek.

Teorema 3.3: Prinsip sarang burung (bentuk kuat)

Jika n objek ditempatkan ke dalam m buah kotak, dan n > m, maka ada kotak yang berisi minimal $\lceil n/m \rceil$ objek.

Catatan:

Fungsi Atas (*The Ceiling Function*)

Untuk suatu bilangan real x, batas atas dari x ditulis $\lceil x \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x, yaitu bilangan bulat tunggal $\lceil x \rceil$ yang memenuhi $x \le \lceil x \rceil \le x+1$

Contoh:

$\lceil 2,58 \rceil = 3$

$\lceil 3,15 \rceil = 4$

$\lceil 7 \rceil = 7$

$\lceil -6,23 \rceil = -6$

$\lceil -1,95 \rceil = -1$

Contoh

Di antara 40 mahasiswa yang ada di kelas, terdapat paling sedikit

$\lceil 40/12 \rceil = 4$ mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama,

$\lceil 40/31 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada tanggal yang sama,

$\lceil 40/7 \rceil = 6$ mahasiswa yang lahir pada hari yang sama,

$\lceil 40/24 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada jam yang sama.

Contoh

Sekantung kelereng terdiri dari 5 merah, 8 biru, 10 putih, 12 hijau, dan 7 kuning. Tentukan minimal kelereng yang dipilih yang menjamin paling sedikit ada:

a. 4 kelereng dengan warna sama

b. 6 kelereng dengan warna sama

c. 7 kelereng dengan warna sama

d. 9 kelereng dengan warna sama

Petunjuk: setiap warna menyatakan sarang burung. Banyaknya sarang burung ada 5

Teorema

a. Jika m merpati ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka paling sedikit satu sarang ditempati oleh lebih dari k merpati, dengan k adalah batas bawah dari $(m\text{-}1)/n$

b. Jika $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n + 1$ merpati (masing-masing p_i merupakan bilangan bulat positif) ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka sarang pertama mempunyai paling sedikit p_1 merpati, atau sarang ke-dua mempunyai paling sedikit p_2 merpati, , atau sarang ke-n mempunyai paling sedikit p_n merpati

Contoh

Sekantung kelereng berisi tepat 6 kelereng merah, 5 kelereng putih, dan 7 kelereng biru. Tentukan jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil yang akan menjamin paling sedikit 3 kelereng merah atau paling sedikit 4 kelereng putih atau paling sedikit 5 kelereng biru yang terambil

Jawab:

Misalkan p_1 adalah kelereng merah, p_2 adalah kelereng putuh dan p_3 adalah kelereng biru. Dengan menggunakan teorema di atas diperoleh $n = 3$, p_1=3, p_2=4, p_3=5

Sehingga jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil adalah

$m = (3+4+5)-3+1 = 10$

Latihan:

1. Dari 100 orang mahasiswa, beberapa di antaranya berulang tahun pada bulan yang sama. Paling sedikit ada berapa mahasiswa yang berulang tahun pada bulan yang sama?
2. Dari suatu kelompok mahasiswa yang terdiri dari 6 orang, paling sedikit 3 di antaranya adalah teman atau paling sedikit 3 di antaranya bukan teman.
3. Dari 26 titik yang terletak pada persegi panjang berukuran 20 cm dan 15 cm, tunjukkan bahwa paling sedikit ada 2 titik yang jaraknya 5 cm.

DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.

Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press: