

BAB 2 (LANJUTAN)

PRINSIP SARANG MERPATI

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Pertemuan ke-7

Prinsip Sarang Burung Merpati

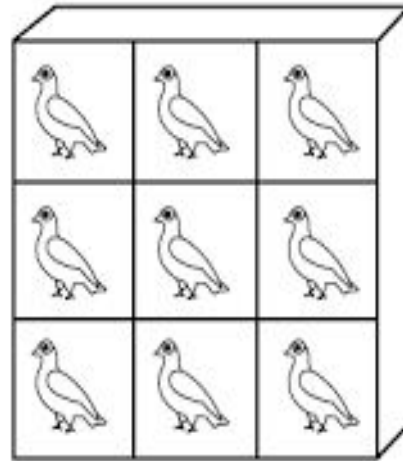
(Pigeon-hole Principle)

Teorema 3.1

Jika $n + 1$ atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka paling sedikit ada lebih dari 1 burung merpati di dalam sarang burung tersebut.



THE PIGEONHOLE PRINCIPLE



Teorema 3.1 (Versi lain I)

Jika $n + 1$ atau lebih objek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih objek

Teorema 3.1 (Versi lain II)

Jika n objek ditempatkan di dalam m buah kotak dan $n > m$, maka paling sedikit satu kotak berisi dua atau lebih objek.

Contoh:

1. Dari 13 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada bulan yang sama.
2. Dari 32 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada tanggal yang sama
3. Dalam sebuah turnamen sepakbola (turnamen *round-robin*), setiap tim bermain melawan tim lainnya tepat satu kali. Misalkan setiap tim menang minimal sekali. Maka ada paling sedikit 2 tim yang menang sekali. Jika ada n tim, maka banyaknya kemenangan untuk setiap tim adalah 1 atau 2 atau 3 atau $(n-1)$.

3. (Lanjutan no. 3 sebelumnya) Bilangan $n-1$ kemenangan ini berhubungan dengan $n-1$ sarang burung, sementara n tim berhubungan dengan burung merpati. Jadi palingsedikit ada dua tim yang ada di sarang burung yang sama. Dengan kata lain, tim-tim tersebut mempunyai jumlah kemenangan yang sama
4. Diketahui 10 bilangan bulat positif yang kurang dari 107. dari sepuluh bilangan tersebut dibuat subset-subset, baik yang saling lepas maupun tidak. Tunjukkan bahwa ada dua subset yang saling lepas dari subset-subset tersebut yang jumlah elemen di dalam subsetnya sama.
5. Buktikan bahwa dari 5 titik yang dipilih dari sebuah persegi yang panjang sisi-sisinya 2, ada 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling banyak akar 2

Teorema 3.2: Prinsip sarang burung secara umum

Jika $kn + 1$ atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka akan ada lebih dari k burung merpati dalam paling sedikit satu sarang burung, dengan k bilangan bulat positif.

Teorema 3.3: Prinsip sarang burung yang dirampatkan

Jika M objek ditempatkan ke dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\lceil M/n \rceil$ objek.

Teorema 3.3: Prinsip sarang burung (bentuk kuat)

Jika n objek ditempatkan ke dalam m buah kotak, dan $n > m$, maka ada kotak yang berisi minimal $\lceil n/m \rceil$ objek.

Catatan:

Fungsi Atas (*The Ceiling Function*)

Untuk suatu bilangan real x , batas atas dari x ditulis $\lceil x \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x , yaitu bilangan bulat tunggal

$\lceil x \rceil$ yang memenuhi $x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1$

Contoh:

$$\lceil 2,58 \rceil = 3$$

$$\lceil 3,15 \rceil = 4$$

$$\lceil 7 \rceil = 7$$

$$\lceil -6,23 \rceil = -6$$

$$\lceil -1,95 \rceil = -1$$

Contoh

Di antara 40 mahasiswa yang ada di kelas, terdapat paling sedikit

$\lceil 40/12 \rceil = 4$ mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama,

$\lceil 40/31 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada tanggal yang sama,

$\lceil 40/7 \rceil = 6$ mahasiswa yang lahir pada hari yang sama,

$\lceil 40/24 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada jam yang sama.

Contoh

Sekantung kelereng terdiri dari 5 merah, 8 biru, 10 putih, 12 hijau, dan 7

kuning. Tentukan minimal kelereng yang dipilih yang menjamin paling sedikit ada:

- a. 4 kelereng dengan warna sama
- b. 6 kelereng dengan warna sama
- c. 7 kelereng dengan warna sama
- d. 9 kelereng dengan warna sama

Petunjuk: setiap warna menyatakan sarang burung. Banyaknya sarang burung ada 5

Teorema

- a. Jika m merpati ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka paling sedikit satu sarang ditempati oleh lebih dari k merpati, dengan k adalah batas bawah dari $(m-1)/n$
- b. Jika $m = p_1 + p_2 + \dots + p_n - n + 1$ merpati (masing-masing p_i merupakan bilangan bulat positif) ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka sarang pertama mempunyai paling sedikit p_1 merpati, atau sarang ke-dua mempunyai paling sedikit p_2 merpati, , atau sarang ke- n mempunyai paling sedikit p_n merpati

Contoh

Sekantung kelereng berisi tepat 6 kelereng merah, 5 kelereng putih, dan 7 kelereng biru. Tentukan jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil yang akan menjamin paling sedikit 3 kelereng merah atau paling sedikit 4 kelereng putih atau paling sedikit 5 kelereng biru yang terambil

Jawab:

Misalkan p_1 adalah kelereng merah, p_2 adalah kelereng putih dan p_3 adalah kelereng biru. Dengan menggunakan teorema di atas diperoleh $n = 3$, $p_1 = 3$, $p_2 = 4$, $p_3 = 5$

Sehingga jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil adalah

$$m = (3 + 4 + 5) - 3 + 1 = 10$$

Latihan:

1. Dari 100 orang mahasiswa, beberapa di antaranya berulang tahun pada bulan yang sama. Paling sedikit ada berapa mahasiswa yang berulang tahun pada bulan yang sama?
2. Dari suatu kelompok mahasiswa yang terdiri dari 6 orang, paling sedikit 3 di antaranya adalah teman atau paling sedikit 3 di antaranya bukan teman.
3. Dari 26 titik yang terletak pada persegi panjang berukuran 20 cm dan 15 cm, tunjukkan bahwa paling sedikit ada 2 titik yang jaraknya 5 cm.

DAFTAR PUSTAKA

- Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.
- Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.
- Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.
- Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.
- Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press: