INDUKSI KUAT

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Pertemuan ke-3

INDUKSI KUAT

Prinsip Induksi Kuat

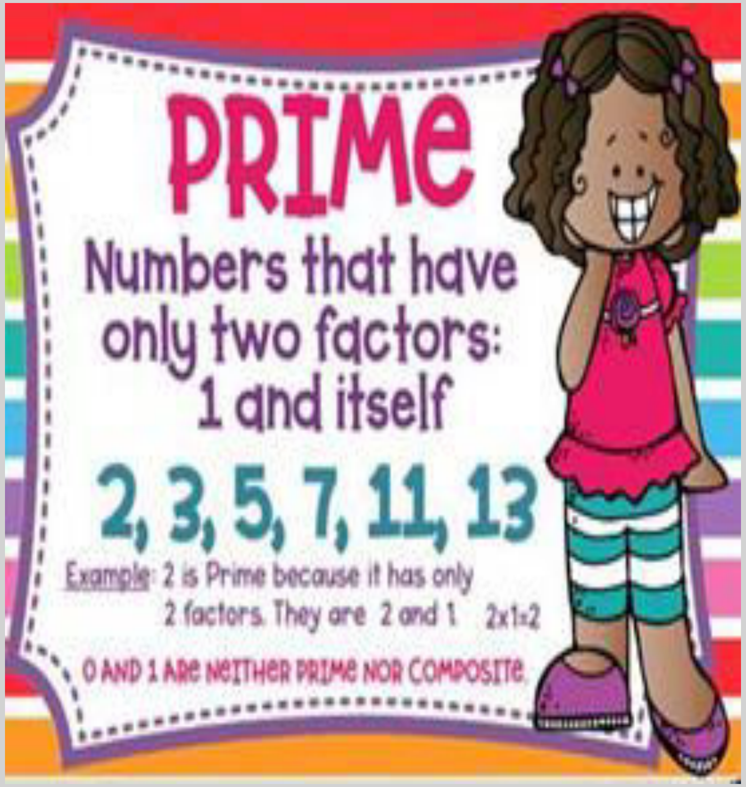
Misal P(n) adalah pernyataan tentang bilangan bulat. Akan dibuktikan P(n) benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan cukup ditunjukkan:

1. $P(n_0)$ benar
2. Jika $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, … , P(n) benar maka P(n+1) juga benar untuk semua bil. Bulat $n \geq n_0$,

sehingga P(n) benar untuk semua bil. bulat $n \geq n_0$.

Contoh:

Gunakan induksi kuat untuk membuktikan bahwa setiap bilangan asli n ≥ 2 adalah bil. prima atau merupakan hasil kali bil. prima.



Bukti:

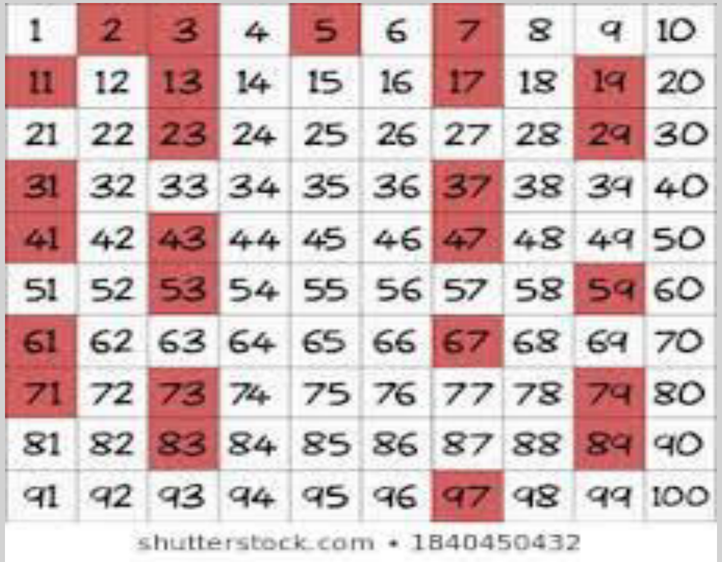
Misal P(n): setiap bil. asli n ≥ 2 adalah bil. prima atau merupakan hasil kali bil. prima.

Basis Induksi

Untuk n = 2, P(2) benar karena 2 bilangan prima.

Langkah Induksi

Andaikan P(2), P(3), P(4), … , P(n) benar (Hipotesis Induksi), artinya untuk semua bilangan asli (2,3,4, … , n) merupakan bil. prima atau merupakan hasil kali prima. Akan ditunjukkan n+1 juga merupakan bil. prima atau hasil kali prima.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Ada dua kemungkinan:

1) n+1 prima 2) n+1 bukan prima

Jika n+1 prima, maka jelas P(n+1) benar.

Jika n+1 bukan prima, maka n+1 dapat difaktorkan yaitu:

n + 1 = ab, dengan a,b € **Z** yang memenuhi 2 ≤ a, b < n + 1 ≤ n

Berdasarkan Hipotesis Induksi, a dan b prima atau hasil kali prima sehingga n+1 merupakan hasil kali prima. Jadi P(n+1) benar untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

Karena P(1) dan P(n+1) benar, maka P(n) benar untuk setiap bil. asli

$n \geq 2$ (terbukti).

ILUSTRASI

- Misal *a* dan *b* prima, tulis:

  $$a = p_1$$
  $$b = p_2, \qquad p_i \text{ prima}$$

  maka $n + 1 = a.b = p_1.p_2$ (hasil kali prima)

- Misal *a* dan *b* hasil kali prima, tulis:

  $$a = p_{11}p_{12} \dots p_{1n}$$
  $$b = p_{21}p_{22} \dots p_{2n}$$

  maka $n + 1 = a.b = p_1.p_2 = (p_{11}p_{12} \dots p_{1n})(p_{21}p_{22} \dots p_{2n})$

-→ (hasil kali prima)

Contoh 2

Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk menyelesaikan suatu puzzle dengan n potongan diperlukan n – 1 langkah

Bukti:

Misal P(n) : untuk menyelesaikan suatu puzzle dengan n potongan diperlukan n – 1 langkah

Basis Induksi

Untuk puzzle dengan 1 potongan tidak diperlukan langkah untuk menyelesaikannya.

Jadi P(1) benar.

Langkah Induksi

Andaikan P(1), P(2), P(3), … , P(n) benar (Hipotesis Induksi).

Artinya untuk menyelesaikan puzzle dengan n_0 = 1,2,3, … , n potongan diperlukan n – 1 langkah.

Akan ditunjukkan bahwa puzzle dengan n + 1 potongan memerlukan n langkah untuk menyelesaikannya.

Bagi n + 1 potongan menjadi dua bagian yaitu n_1 dan n_2 sehingga

$$n + 1 = n_1 + n_2$$

Berdasarkan Hipotesis Induksi untuk menyelesaikan puzzle dengan

n_1 potongan diperlukan $n_1 – 1$ langkah

n_2 potongan diperlukan $n_2 – 1$ langkah.

Apabila kedua langkah tersebut digabungkan dengan satu langkah terakhir untuk menyatukannya maka diperoleh:

$$(n_1 – 1) + (n_2 – 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1$$

$$= (n + 1) – 1$$

$$= n$$

Jadi $P(n + 1)$ benar untuk semua $n \geq 1$.

Kesimpulan:

karena P(1) dan P(n + 1) benar untuk semua $n \geq 1$ maka P(n) benar untuk setiap bil. positif n.

Dengan kata lain, untuk menyelesaikan puzzle dengan n potongan diperlukan $n - 1$ Langkah.

Contoh 3

Buktikan dengan induksi kuat bahwa pernyataan untuk membayar biaya pos sebesar n sen ($n \geq 8$) selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan atau perangko 5 sen saja benar.

Bentuk Induksi Secara Umum

Definisi: Terurut dengan baik (*well ordering principle*)

Relasi biner “<“ pada himpunan R dikatakan terurut dengan baik jika:

1. Diketahui $x, y, z \in R, x < y \ dan \ y < z, \ maka \ x < z$; (sifat transitif);
2. Diketahui $x, y, z \in R, x < y \ atau \ y < x \ atau \ x = y$ (sifat trikotomi);
3. Jika *A* himpunan bagian tidak kosong dari *R,* terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$.

Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong *R* memuat elemen terkecil.

Induksi Secara Umum

Definisi 1.2: Induksi secara umum

Misal: X terurut dengan baik oleh “ $<$ ”.

$P(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X.

Untuk membuktikan $P(x)$ benar untuk semua $x \in X$, cukup ditunjukkan:

1. $P(x_0)$ benar, dengan x_0 adalah elemen terkecil dalam X,
2. jika $P(y)$ benar untuk $y < x$, maka $P(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ dalam X,

sehingga $P(x)$ benar untuk semua $x \in X$.

Contoh 1

Perhatikan barisan bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematik, bahwa untuk pasangan tak negatif *m* dan *n*,

berlaku $S_{m,n} = m + n$.

Bukti:

Misalkan $P(x)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan $S_{m,n}$ yang didefinisikan pada soal di atas.

Basis Induksi:

$x_0 = \left(0,0\right)$ adalah elemen terkecil di dalam *X*, sehingga $P(x_0) = S_{0,0}$.

$S_{0,0} = 0 + 0 = 0$, sedangkan berdasarkan definisi $S_{0,0} = 0$.

Jadi $P(x_0)$ benar.

Langkah Induksi:

Misalkan $P(y) = S_{m',n'}$ dan $P(x) = S_{m,n}$.

Andaikan $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m',n') < (m,n)$ (*Hipotesis Induksi*).

Akan dibuktikan bahwa $S_{m,n} = m + n$ juga benar untuk semua $(m,n) > (0,0)$ di X. Dengan kata lain, berdasarkan definisi di atas akan ditunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus I:

Jika $n = 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$.

Karena $(m-1, n) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi $S_{m-1,n} = (m-1) + n$,

sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1) + n + 1 = m + n$. Jadi $S_{m,n} = P(x)$ benar.

Kasus II:

Jika $n \neq 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$.

Karena $(m, n-1) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi $S_{m,n-1} = m + (n-1)$,

sehingga $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) + 1 = m + n$. Jadi $S_{m,n} = P(x)$ benar.

Dari kasus I dan II disimpulkan bahwa $S_{m,n} = m + n$ benar untuk (m,n) di X.

Kesimpulan:

Karena $P(x_0) = S_{0,0}$ dan $P(x) = S_{m,n}$ benar maka terbukti bahwa $S_{m,n} = m + n$ benar untuk semua pasangan tak negatif $m\ dan\ n$.

Latihan 1.14:

Perhatikan barisan bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{1,1} = 5 \\ S_{m-1,n} + 2 \ \text{ jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 \ \text{ jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n) berlaku $S_{m,n} = 2(m+n)+1$.

DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.

Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press: