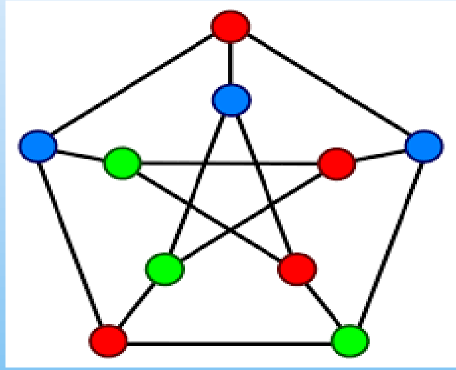
PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN SAINS

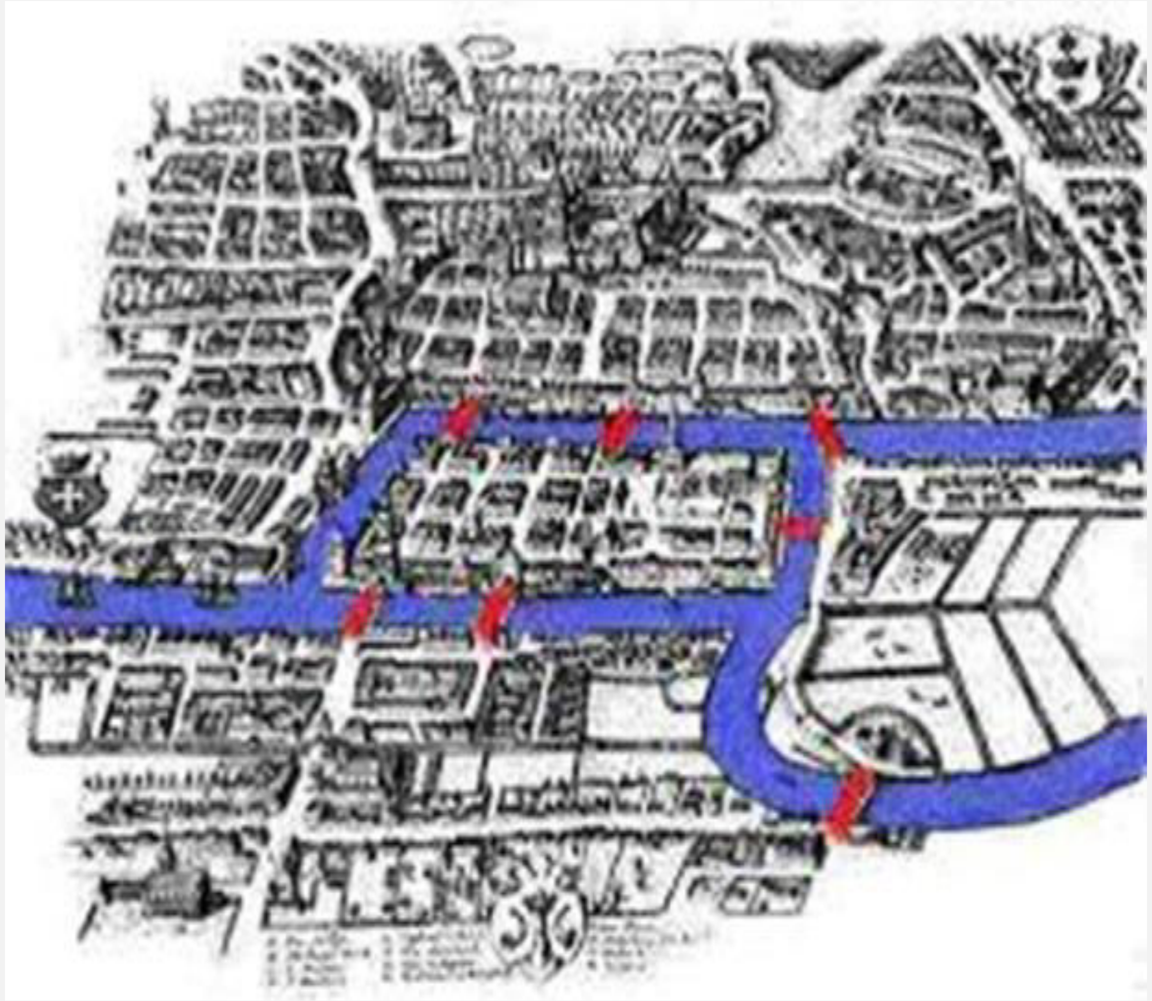
GRAF



Dr. Rippi Maya, M.Pd.

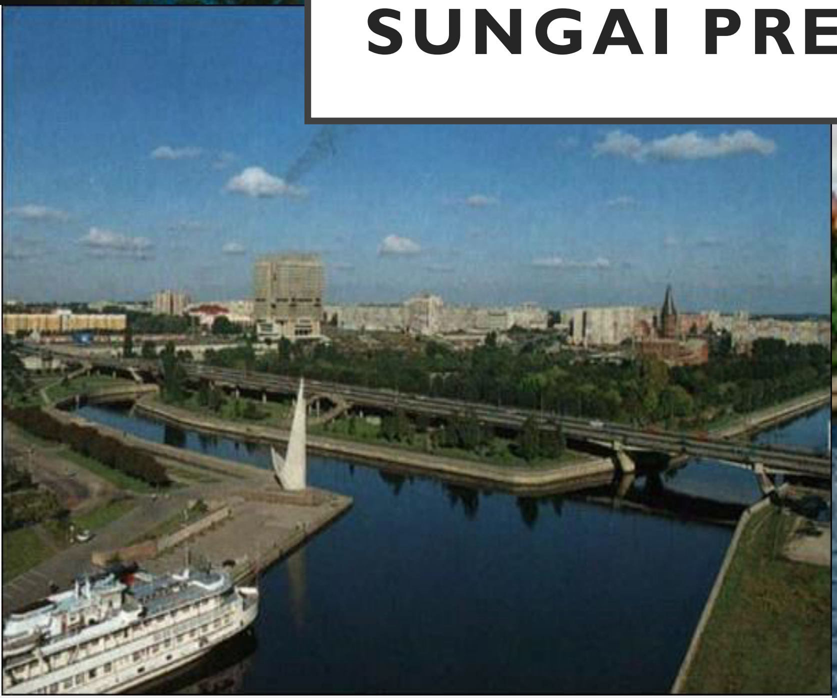
Semester 5
Tahun Akademik 2020-2021

SEJARAH TEORI GRAF



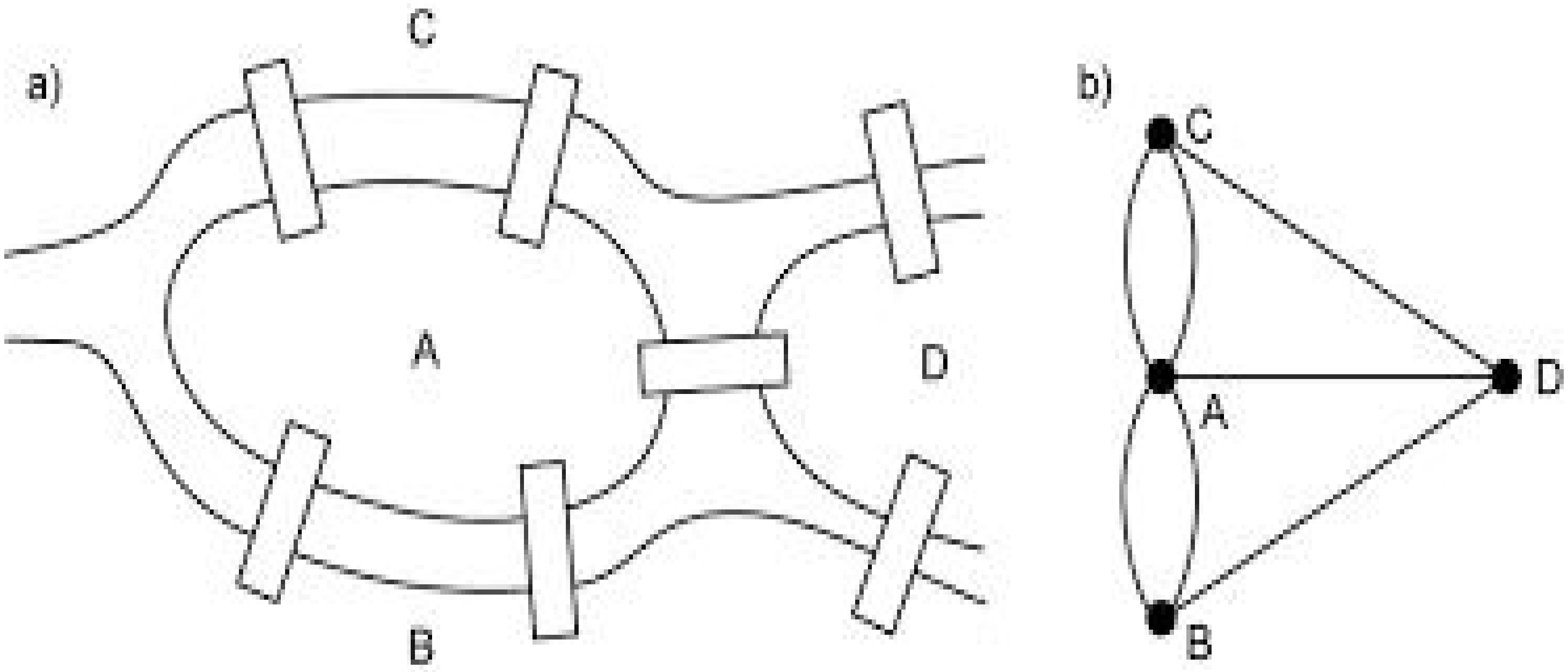
- Sejarah terciptanya graf dimulai dari masalah jembatan Königsberg. Pada abad ke-18, Königsberg merupakan ibu kota dari Prussia Timur. Di kota tersebut mengalir sungai Pregel. Mendekati pulau Kneiphof, sungai ini bercabang dua mengelilingi pulau tersebut. Tujuh jembatan melintasi sungai, yang menghubungkan antara daratan dan pulau tersebut.

SUNGAI PREGEL DAN JEMBATAN KONIGSBERGH



- Masalah Jembatan Konigsberg (sekarang bernama Kaliningrad, Rusia) merupakan masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1756).
- Masalah: bila kita berada pada suatu tempat tertentu, mungkinkah kita dapat kembali ke tempat tersebut setelah melewati 7 jembatan tersebut tepat satu kali.
- Seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euleur (1707-1783) menyatakan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke tempat semula jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap.

Gambar Graf Yang Mempresentasikan Jembatan Konigsberg



C = simpul (verteks)
CB = sisi (edge)

d(A) = 5

d(B) = 3

d(C) = 3

d(D) = 3

DEFINISI GRAF

Graf adalah pasangan himpunan (V,E), dimana;

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (verteks)

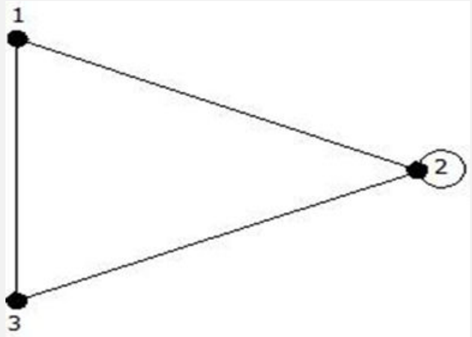
E = himpunan sisi-sisi (edge atau arcs) yang menghubungkan sepasang simpul

Notasi G = (V,E)

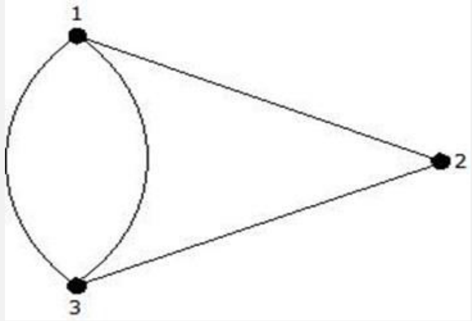
- Secara geometri graf digambarkan sebagai kumpulan noktah (simpul) yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi)

- Himpunan simpul dari graf *G* ditulis dengan *V*(*G*), sedangkan himpunan sisi dari graf *G* dinyatakan dengan *E*(*G*).
- Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti $a, b, c, d, \dots$, dengan bilangan asli $1, 2, 3, \dots$.
- Sisi yang menghubungkan simpul *u* dengan simpul *v* dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \dots$. Dengan kata lain, jika e menghubungkan u dan v, maka e dapat ditulis $e = (u, v)$

- Sebuah sisi dikatakan *loop* (gelang) jika sisi tersebut menghubungkan simpul yang sama. Dengan kata lain e adalah loop, jika $e = (v, v)$.



- Jika dua buah sisi atau lebih menghubungkan dua simpul yang sama, maka sisi-sisi tersebut dikatakan sisi ganda (*multiple edges* atau *paralel edges*).



Jenis-Jenis Graf:

A. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf.

B. Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf.

C. Berdasarkan orientasi arah pada sisi.

JENIS-JENIS GRAF

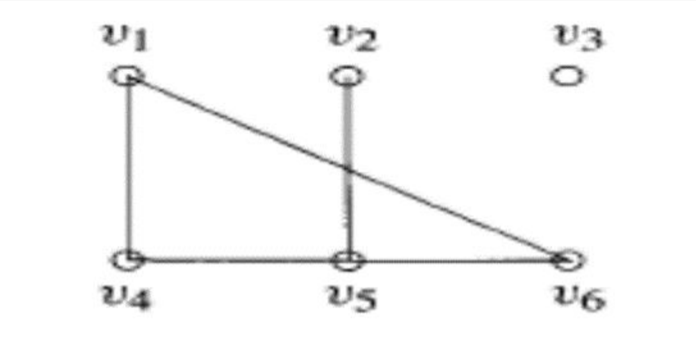
A. Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada suatu graf.

1. **Graf sederhana** (*simple graph*)

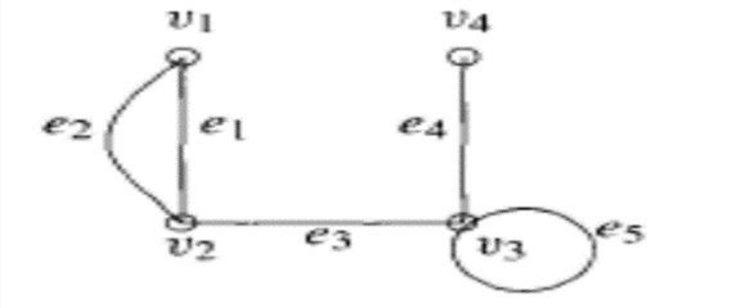
Graf yang tidak mengandung gelang maupun sisi ganda dinamakan graf sederhana.

2. **Graf tak-sederhana** (*unsimple-graph*)

Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang (*loop*) dinamakan graf tak sederhana (*unsimplegraph*).Ada 2 macam graph tak sederhana, yaitu **graf ganda** (*multigraph)* dan **graf semu** (*pseudograph)*



Graf sederhana



Graf tidak sederhana

JENIS-JENIS GRAF

B. Berdasarkan jumlah simpul pada suatu graf:

1. **Graf berhingga** (*limited graph*)

Graf berhingga adalah graf yang jumlah simpulnya *n* (berhingga).

2. **Graf tak-berhingga** (*unlimited graph*)

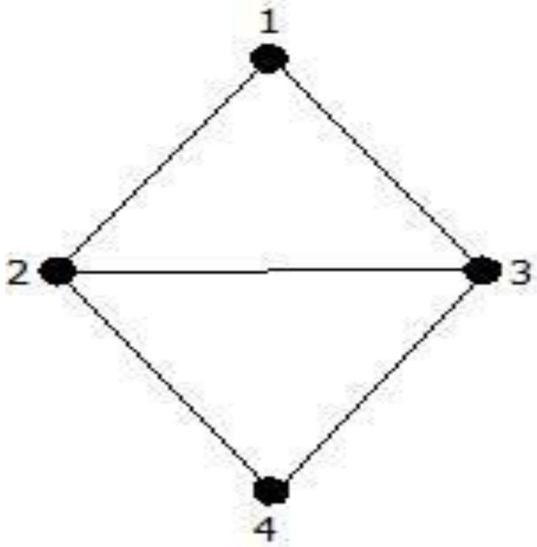
Graf yang jumlah simpulnya tidak berhingga banyaknya disebut **graf tak-berhingga**.

= n = |V|

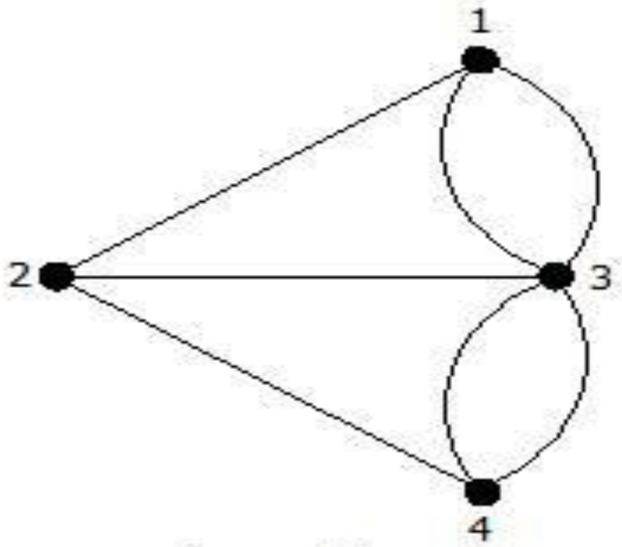
KARDINALITAS GRAF

- Jumlah simpul pada graf = n = |V|
- Jumlah sisi = m = |E|

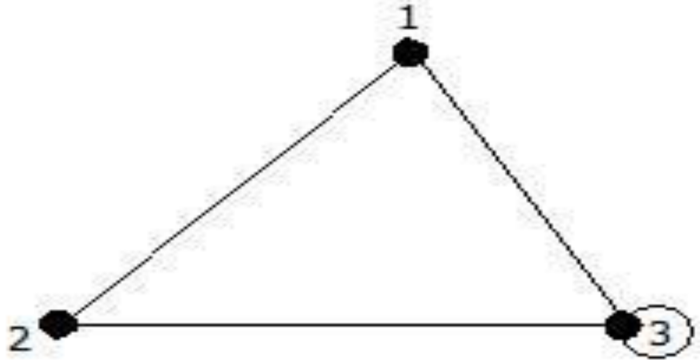
  Contoh:



n=4, m=4



n=4, m=7



n=3, m=5

JENIS-JENIS GRAF

Berdasarkan Orientasi arah pada sisi

Secara umum dibedakan atas 2 jenis:

- **Graf tak-berarah**

  Graf yang sisi-sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan.

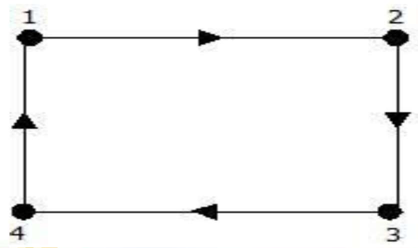
  Jadi (u,v) = (v,u) adalah sisi yang sama.

- ***Graf berarah (directed graph atau digraph)***

  Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Sisi berarah disebut busur (*arc*). (u,v) tdk sama dengan (v,u) artinya menyatakan dua busur yang berbeda.

- Pada busur (u,v) , u dinamakan **simpul asal** (*initial vertex*) dan v dinamakan **simpul terminal** (*terminal vertex*).

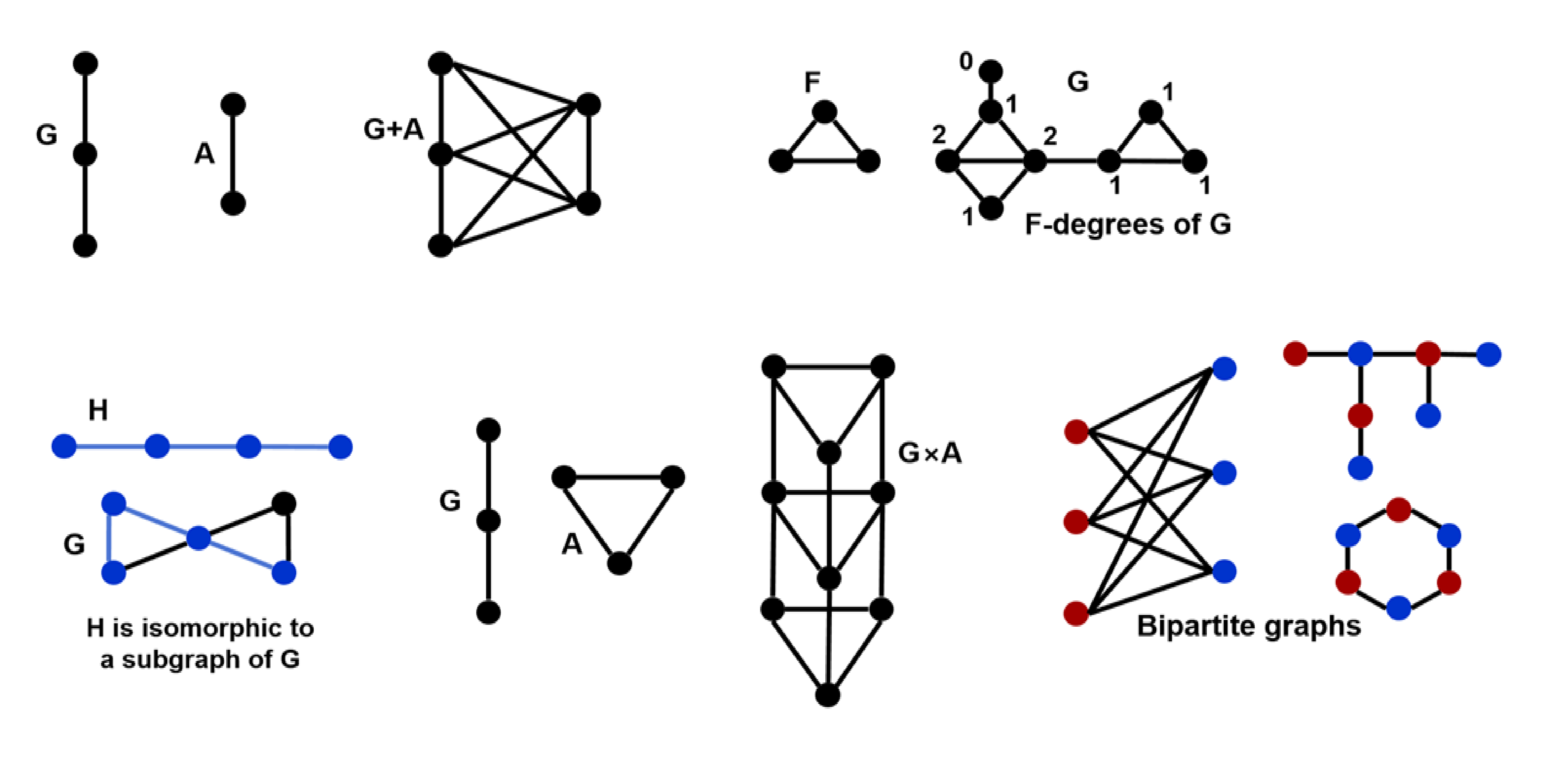
  Contoh:



RANGKUMAN JENIS-JENIS GRAF

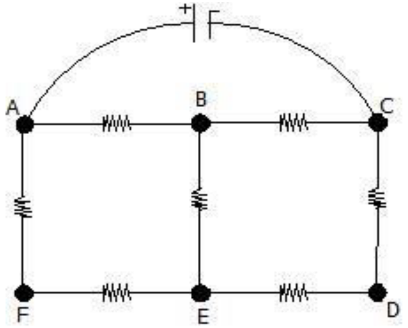
Jenis	Sisi	Sisi Ganda Dibolehkan?	Sisi Gelang Dibolehkan?
Graf Sederhana	Tak Berarah	Tidak	Tidak
Graf Ganda	Tak Berarah	Ya	Tidak
Graf Semu	Tak Berarah	Ya	Ya
Graf Berarah	Berarah	Tidak	Ya
Graf Ganda Berarah	Berarah	Ya	Ya

BEBERAPA CONTOH GRAF

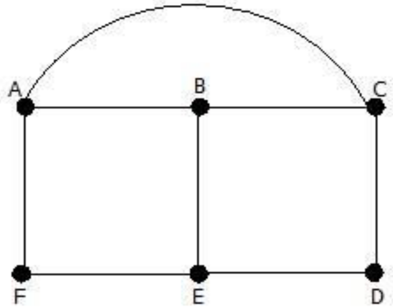


TERAPAN GRAF

1. Rangkaian Listrik

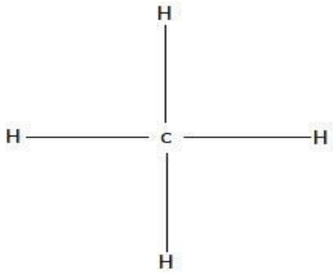


Rangkaian Listrik

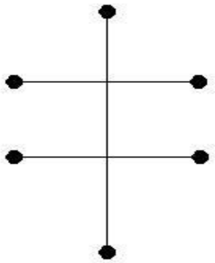


Graf yang menyatakan Rangkaian Listrik

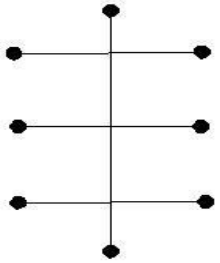
2. Isomer Senyawa Kimia Karbon



Metana (CH_2)

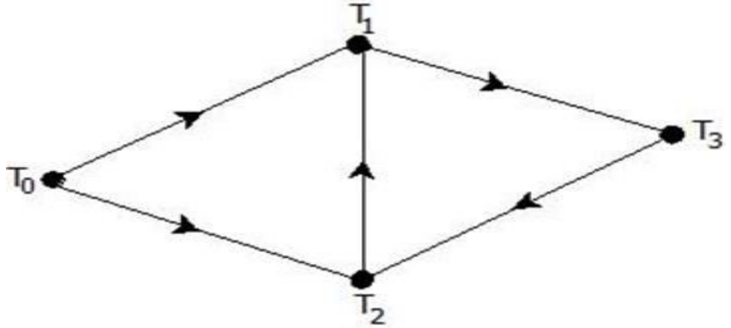


etana (C_2H_6)

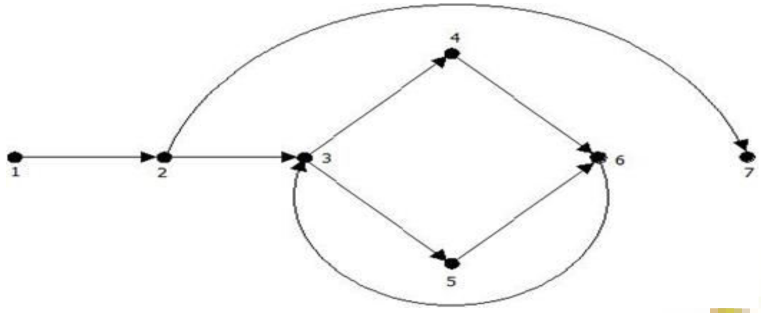


propana (C_3H_8)

3. Transaksi Konkuren pada Basis data Komputer

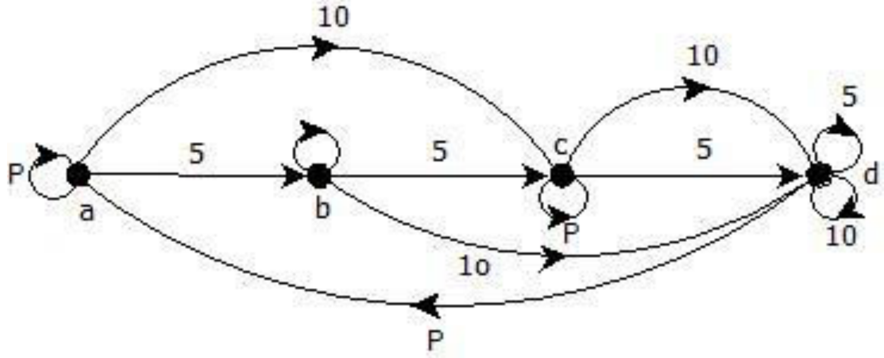


4. Pengujian Program

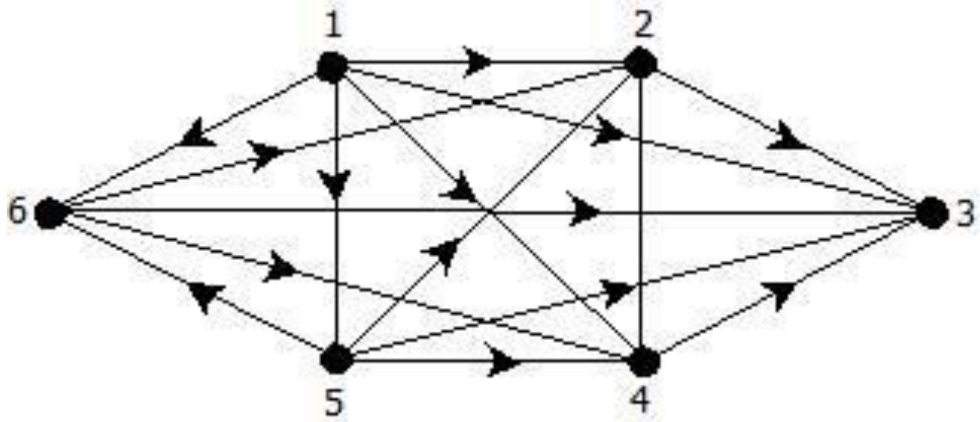


TERAPAN GRAF

5. Terapan Graf di dalam Teori otomata

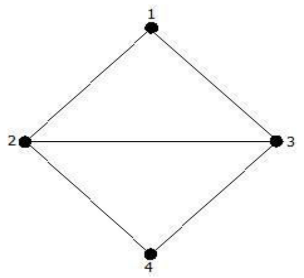


6. Turnamen Round-Robin



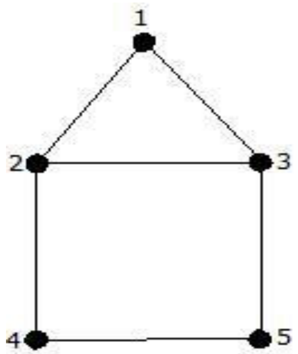
TERMINOLOGI GRAF

1. Bertetangga



Simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan simpul 3, tetapi tidak dengan simpul 4.

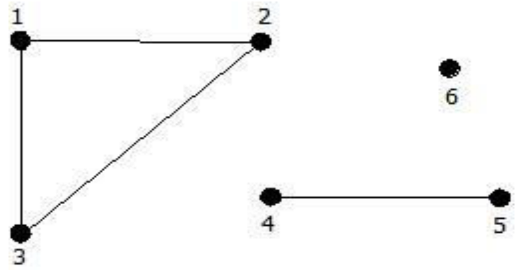
2. Bersisian



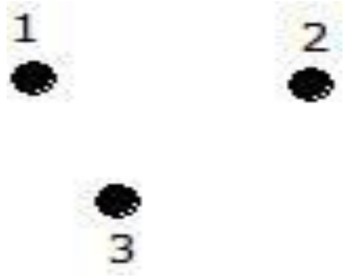
Sisi (1,2) bersisian dengan simpul 1 dan simpul 2.
Sisi (3,5) tidak bersisian dengan simpul 2.

3. Simpul Terpencil

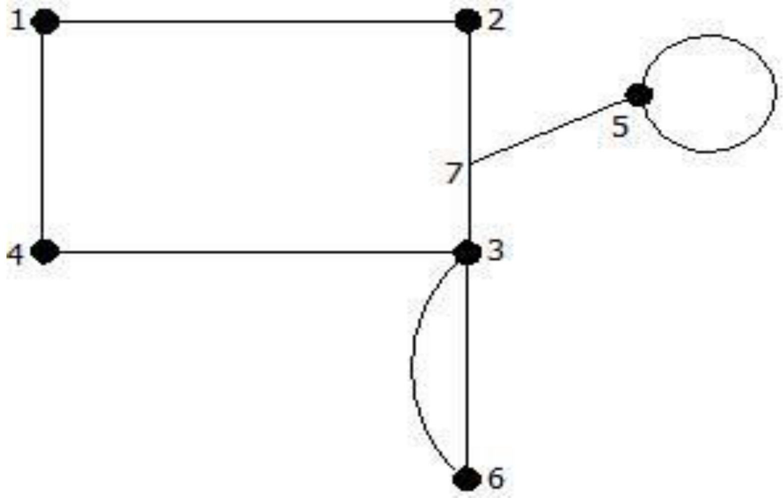
Simpul 6 adalah simpul terpencil



4. Graf kosong



5. Derajat



d(1) = 2 d(4) = 2 d(6) = 2

d(2) = 2 d(5) = 3 d(7) = 3

d(3) = 4

Barisan derajat dari graf di samping adalah: 2,2,4,2,3,2,3.

Atau bisa juga dituliskan dalam urutan besar derajatnya: 4,3,3,2,2,2,2.

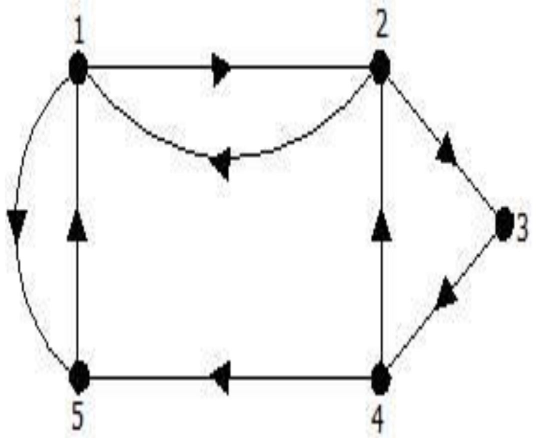
Jika terdapat g buah gelang dan e buah sisi bukan-gelang yang bersisian dengan simpul v, maka derajat simpul v adalah $d(v) = 2g + e$

Definisi: Pada graf berarah, derajat simpul v dinyatakan dengan $d_{in}(v)$ dan $d_{out}(v)$, yang dalam hal ini

$d_{in}(v) =$ derajat-masuk (in-degree) = jumlah busur yang masuk ke simpul v

$d_{out}(v) =$ derajat-keluar (out-degree) = jumlah busur yang keluar dari simpul v

$d(v_i) = d_{in}(v_i) + d_{out}(v_i)$, $v_i =$ simpul ke-i



$d_{in}(1) = 2$ $d_{out}(1) = 2$

$d_{in}(2) = 2$ $d_{out}(2) = 2$

$d_{in}(3) = 1$ $d_{out}(3) = 1$

$d_{in}(4) = 1$ $d_{out}(4) = 2$

$d_{in}(5) = 2$ $d_{out}(5) = 1$

8 8

LEMMA JABAT TANGAN

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. Dengan kata lain, jika $G = (V, E)$, maka

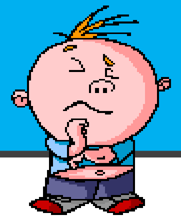
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Akibat Lemma Jabat Tangan

Teorema:

untuk sembarang graf G, banyaknya simpul yang berderajat ganjil selalu genap.

LATIHAN



1. Coba gambarkan graf sederhana yang mempunyai barisan derajat sebagai berikut:

   a) 1, 5, 4, 4, 3, 2, 2

   b) 1, 1, 1, 1, 1, 1

   c) 5, 5, 4, 4, 3, 2, 1

   d) 5, 5, 4, 3, 2, 1

2. Tentukan banyaknya sisi suatu graf yang mempunyai 6 simpul dengan 4 simpul berderajat 2 dan 2 simpul berderajat 4.

SYARAT MENGGAMBAR SUATU GRAF

1. Jumlah derajat semua simpul selalu genap
2. Banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap
3. Logis

DAFTAR PUSTAKA

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.