



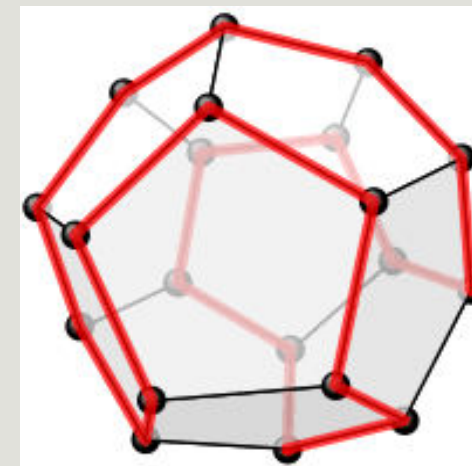
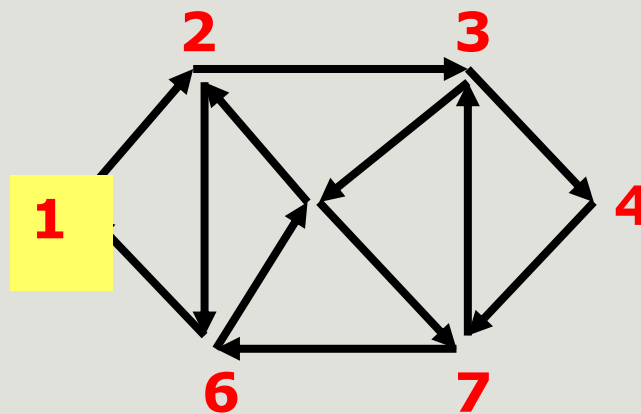
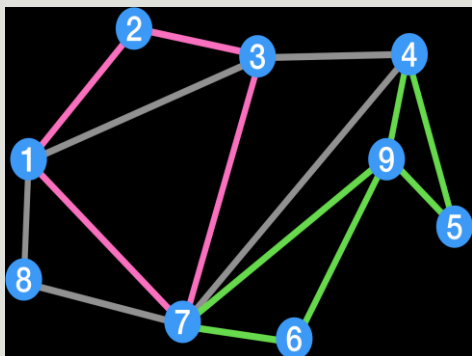
**PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN SAINS**

GRAF-4: LINTASAN DAN SIRKUIT

MATEMATIKA DISKRIT

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Lintasan dan Sirkuit: Euler dan Hamilton



Lintasan dan Sirkuit Euler

Definisi :

Lintasan Euler ialah lintasan yang melalui masing-masing **sisi** di dalam graf tepat satu kali.

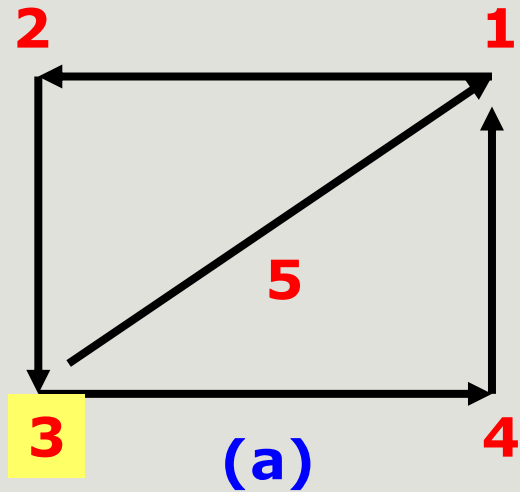
Bila lintasan tersebut kembali ke simpul asal, membentuk lintasan tertutup (sirkuit), maka lintasan tertutup ini dinamakan **sirkuit Euler**.

Jadi, **sirkuit Euler** ialah sirkuit yang melewati masing-masing **sisi tepat satu kali**.

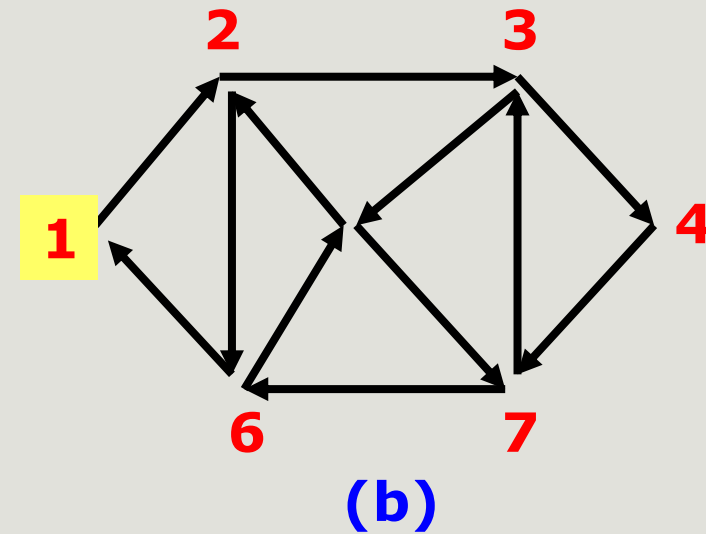
Graf yang mempunyai **sirkuit Euler** dinamakan **graf Euler**.

Graf yang mempunyai **lintasan Euler** dinamakan juga **graf semi Euler**.

Contoh:



Lintasan Euler gbr (a) : **3, 1, 2, 3, 4, 1**



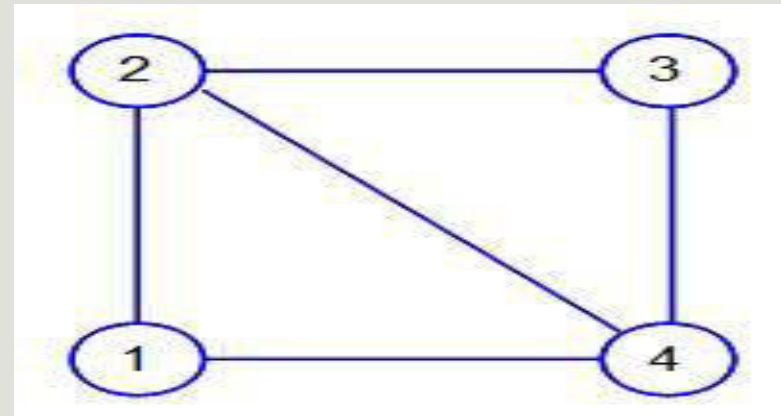
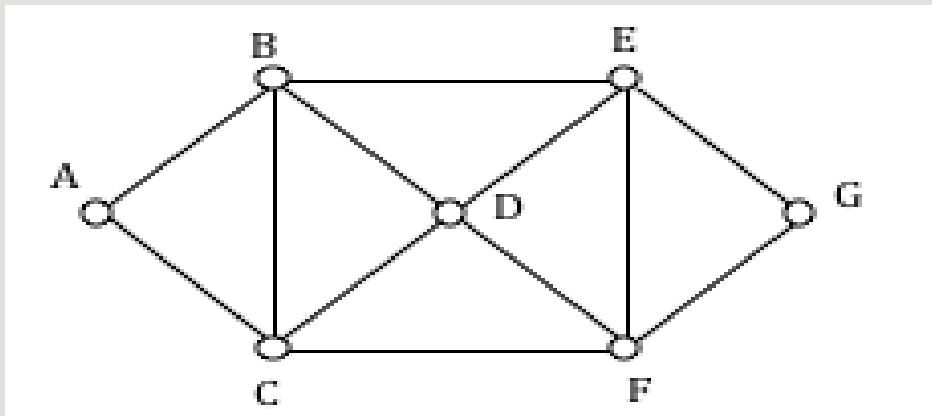
Sirkuit Euler gbr (b) :

1, 2, 3, 4, 7, 3, 5, 7, 6, 5, 2, 6, 1

Teorema

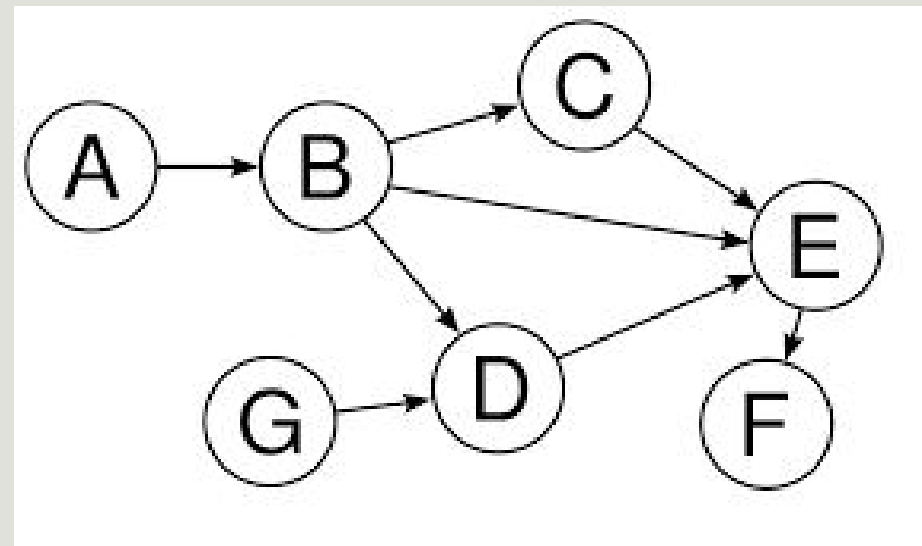
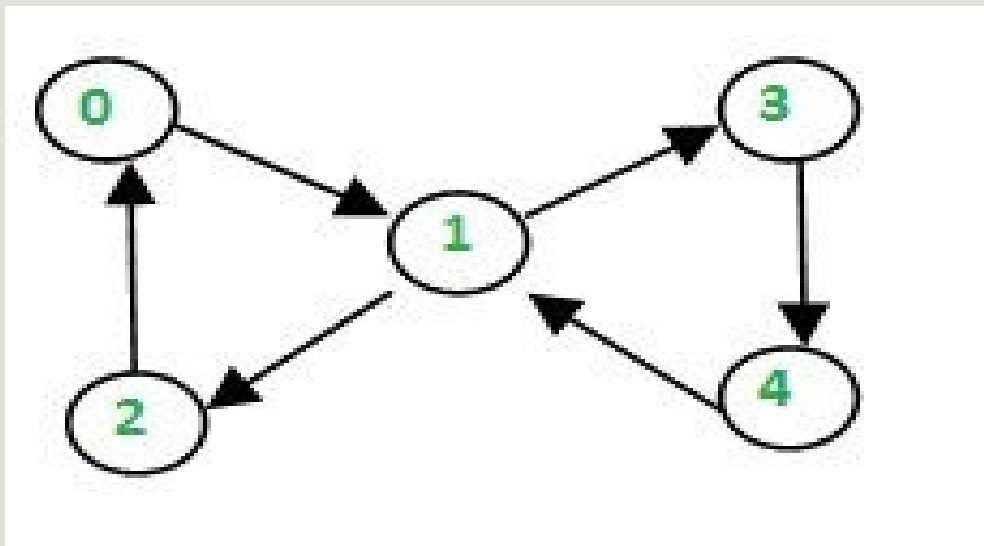
Graf terhubung tak berarah G adalah:

1. **Graf Euler** jika dan hanya jika setiap simpul di dalam graf tersebut **berderajat genap**.
2. **Graf semi Euler** jika dan hanya jika di dalam graf tersebut terdapat tepat dua simpul **berderajat ganjil**.



Teorema

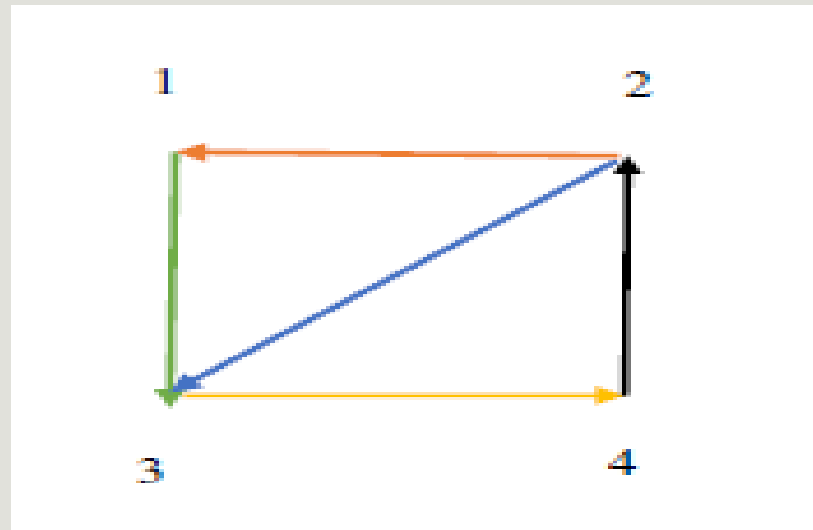
Graf terhubung berarah G memiliki **sirkuit Euler** jika dan hanya jika G terhubung dan setiap simpul memiliki derajat masuk dan derajat keluar **sama**.



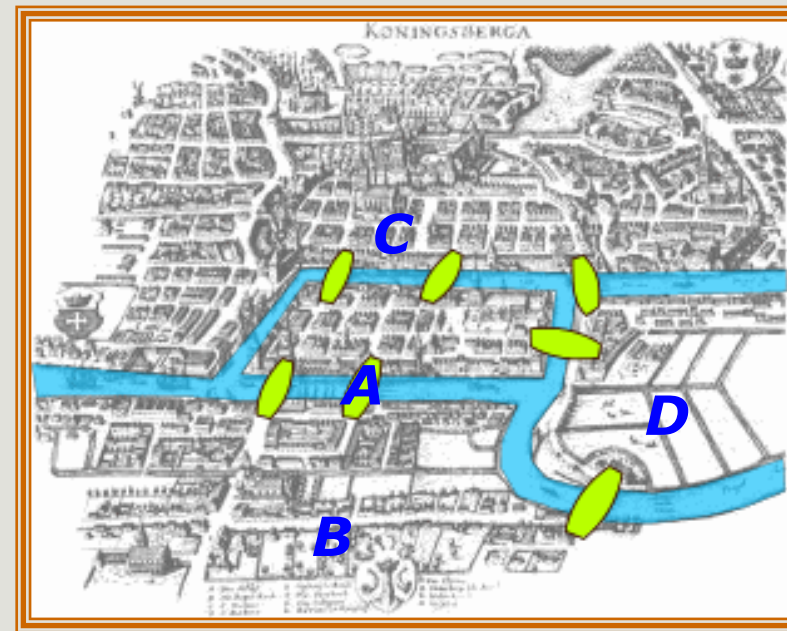
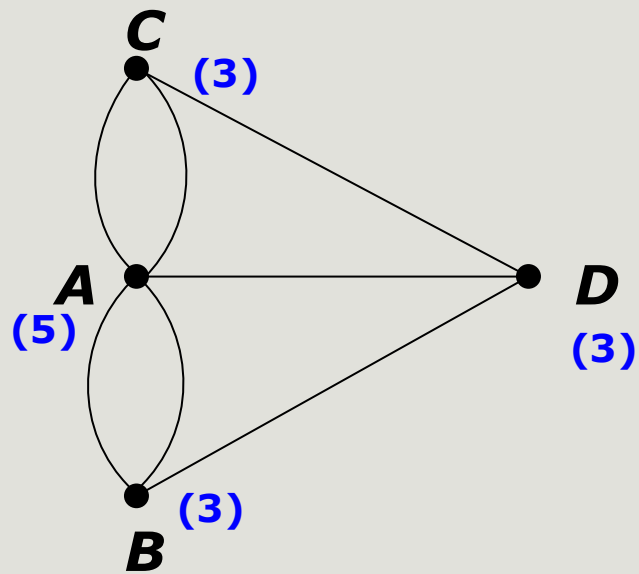
Graf terhubung berarah G :

memiliki lintasan Euler jika dan hanya jika **G terhubung** dan setiap simpul memiliki **derajat masuk dan derajat keluar sama** kecuali dua simpul:

1. yang **pertama** memiliki derajat keluar satu lebih besar dari derajat masuk,
2. yang **kedua** memiliki derajat masuk satu lebih besar dari derajat keluar.

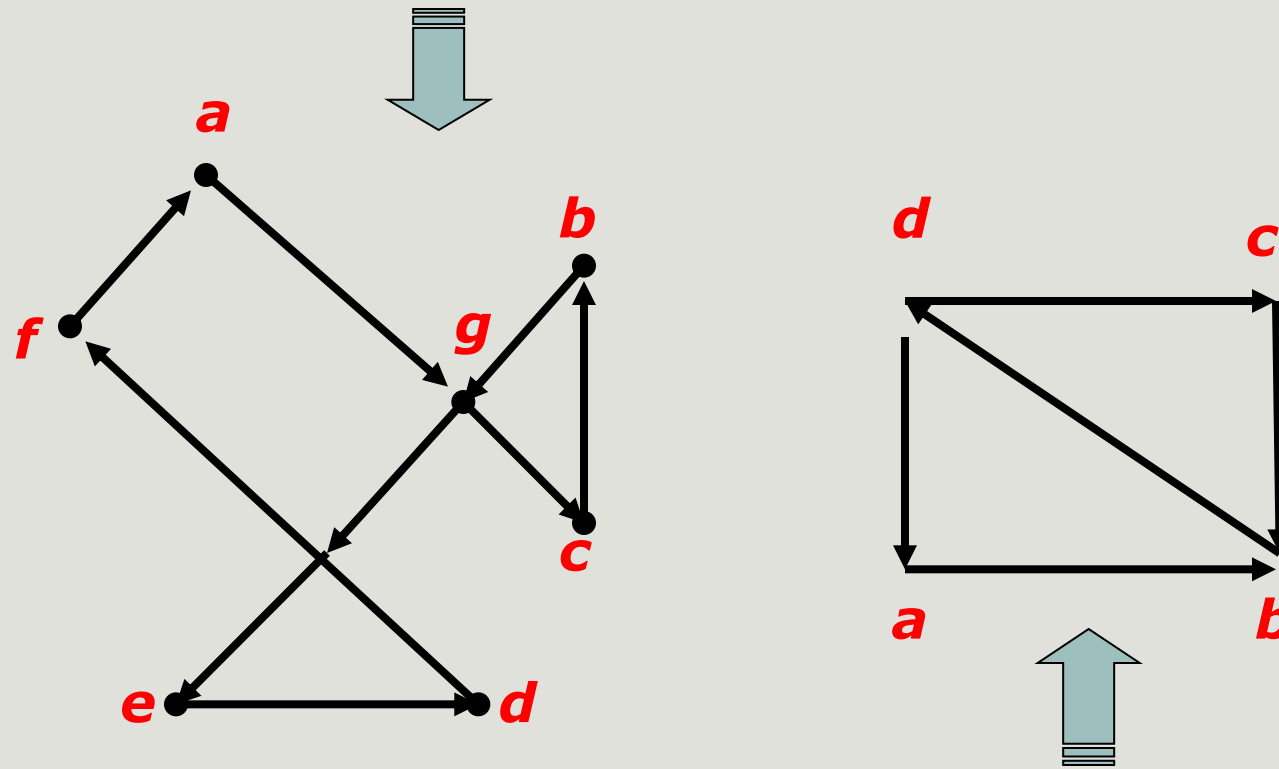


Dengan menggunakan Teorema Euler jelaslah masalah **Jembatan Konigsberg** **tidak** memiliki **sirkuit Euler** karena semua simpul berderajat **ganjil**.



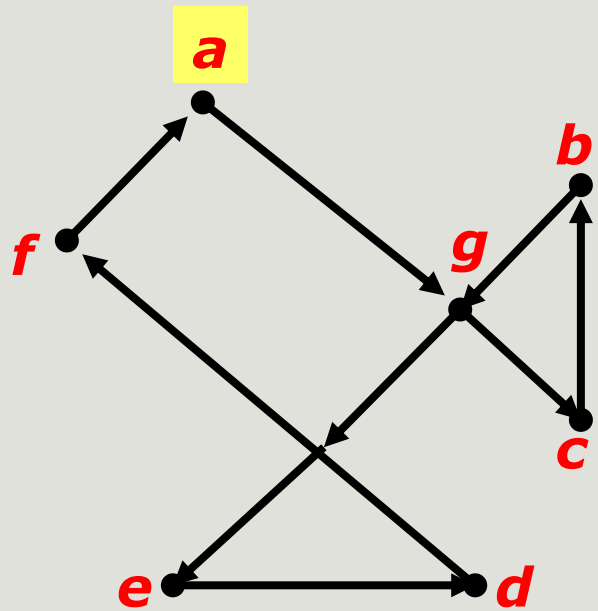
Graf yang mempunyai **sirkuit Euler** harus memenuhi:

1. Graf tersebut harus terhubung.
2. Semua simpul pada graf berderajat genap.

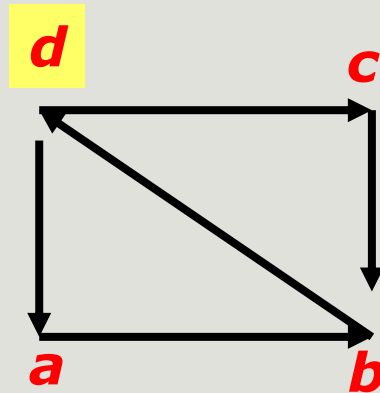


Graf yang mempunyai **lintasan Euler** harus memenuhi :

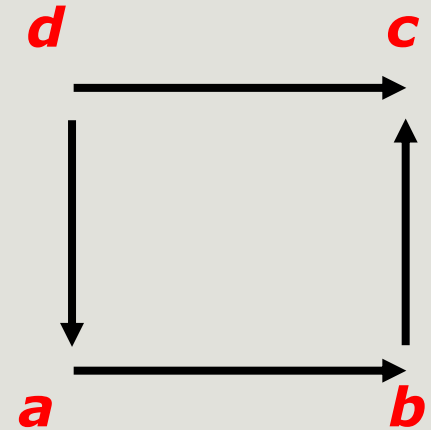
1. Graf tersebut harus terhubung.
2. Graf memiliki tepat 2 buah simpul berderajat ganjil.



(a)



(b)



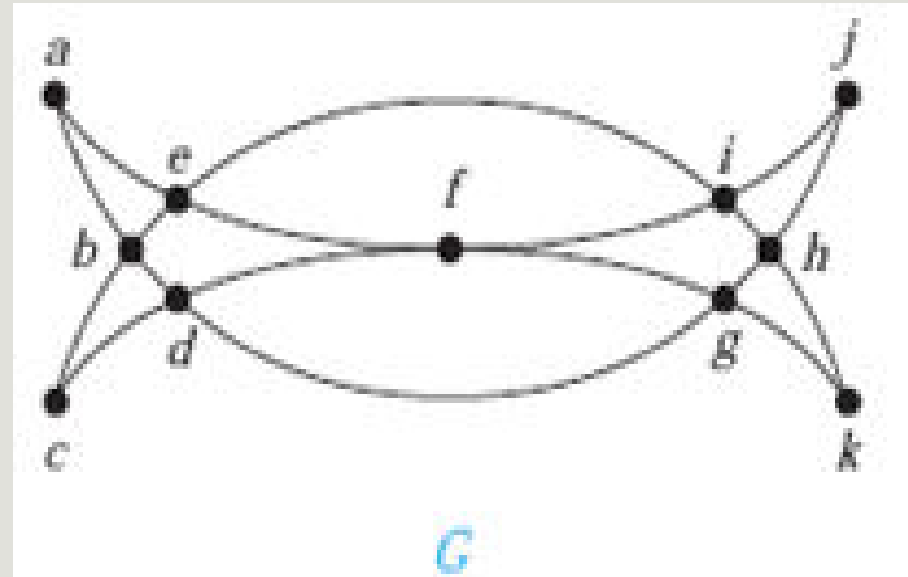
(c)

(a) Graf berarah yang mempunyai sirkuit Euler: $a, g, c, b, g, e, d, f, a$

(b) Graf berarah yang mempunyai lintasan Euler: d, a, b, d, c, b

(c) Graf berarah yang tidak memiliki lintasan dan sirkuit Euler

Graf bulan sabit (*Mohammed's scimitars*)

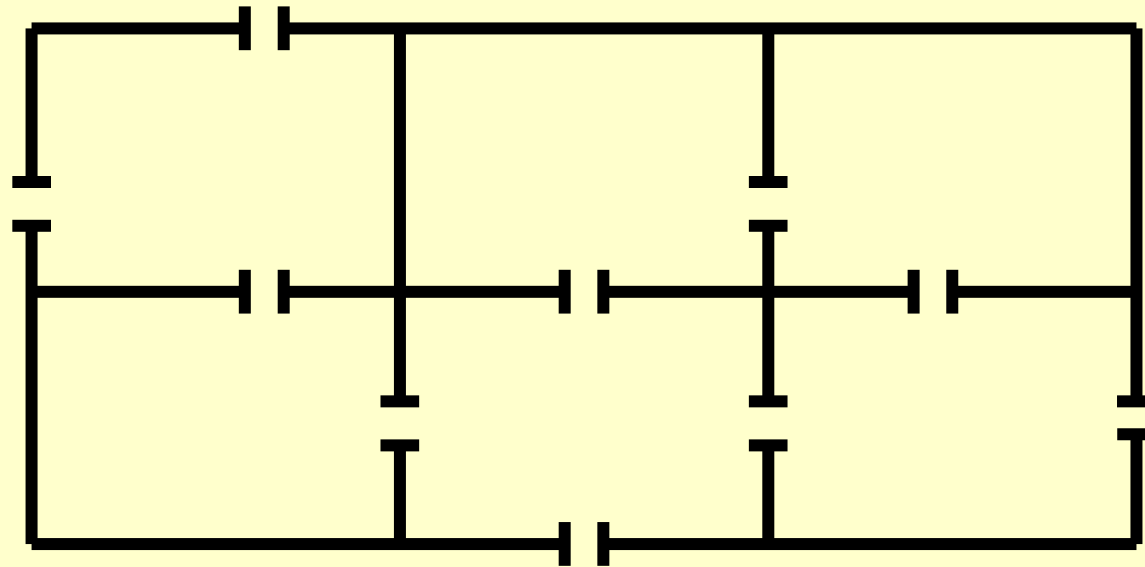


Graf tidak berarah yang mempunyai **sirkuit Euler**:

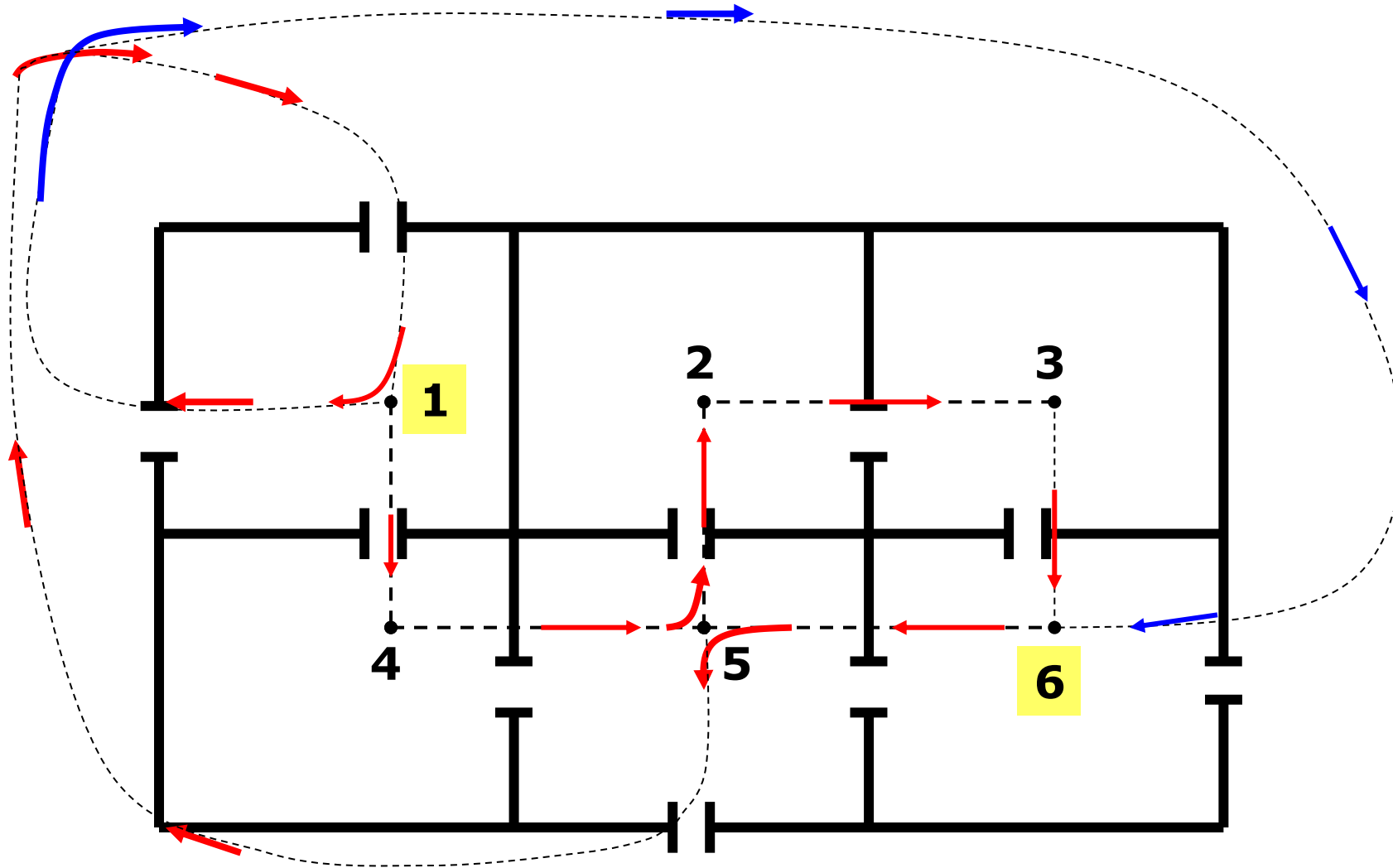
$(a, b, d, g, h, j, i, f, d, c, b, e, i, h, k, g, f, e, a)$

Contoh 8.41 :

Gambar dibawah ini adalah **denah lantai dasar** sebuah gedung. Apakah dimungkinkan **berjalan melalui setiap pintu** di lantai itu hanya **satu kali saja** jika kita boleh mulai memasuki pintu yang mana saja?

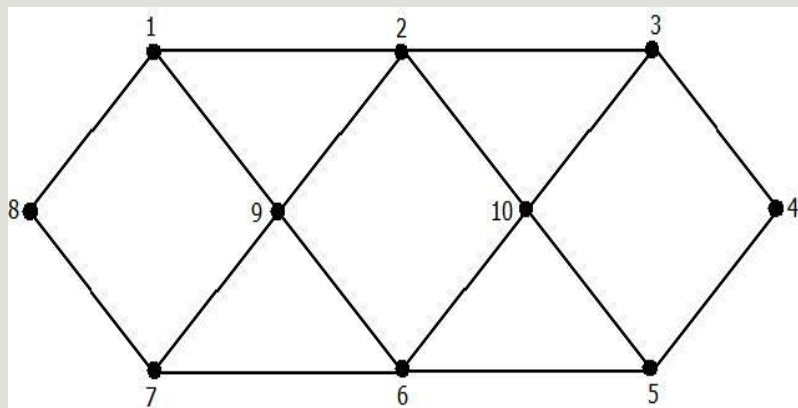


Contoh 8.41 :

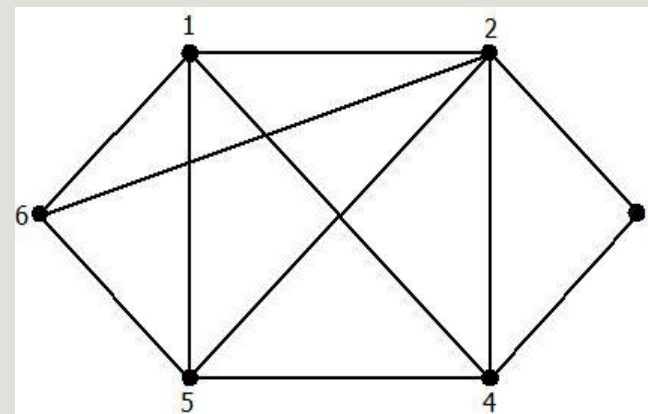


Graf tersebut terdapat **lintasan Euler** karena memiliki 2 buah simpul (**1** dan **6**) berderajat **ganjil**.

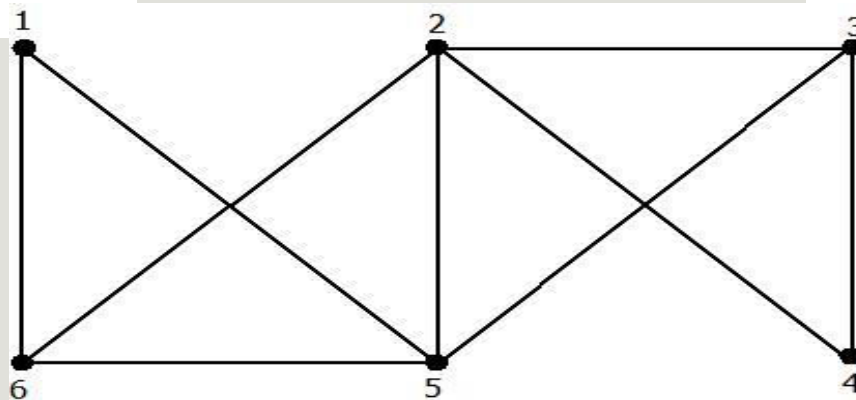
Periksa apakah graf berikut graf Euler/semi Euler/tidak keduanya, lalu sebutkan lintasannya (kalau ada).



G_1



G_2



G_3

Lintasan dan Sirkuit **Hamilton**

Lintasan Hamilton ialah lintasan yang melalui tiap **simpul** di dalam graf tepat satu kali.

Bila lintasan kembali ke simpul asal membentuk sirkuit maka dinamakan sirkuit Hamilton.

Sirkuit Hamilton ialah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali, kecuali simpul asal (sekaligus simpul akhir) yang dilalui 2 kali.

Graf Hamilton dan Graf semi Hamilton

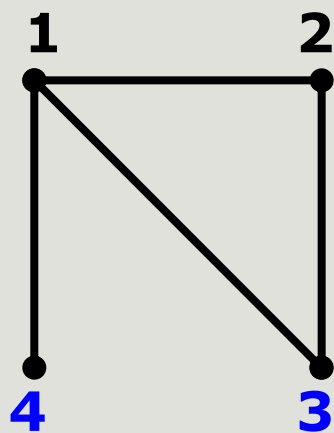
Graf Hamilton :

Graf yang memiliki sirkuit Hamilton.

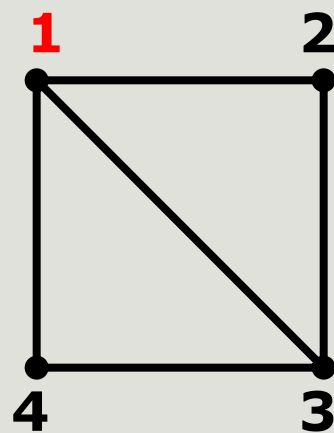
Graf semi Hamilton :

Graf yang hanya memiliki lintasan Hamilton.

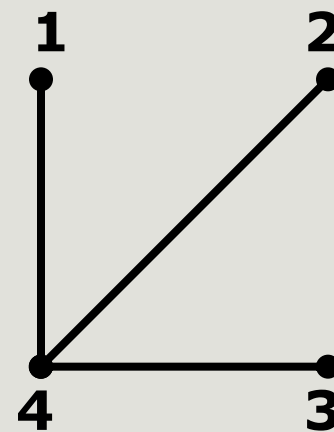
Perhatikan graf berikut. Selidiki apakah graf tersebut merupakan graf Hamilton, semi Hamilton atau bukan keduanya, lalu tuliskan lintasannya (bila ada).



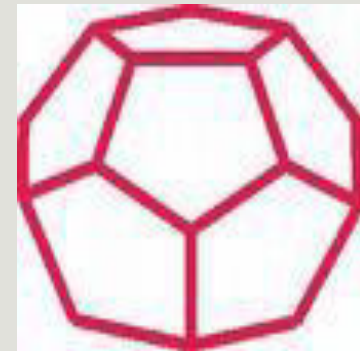
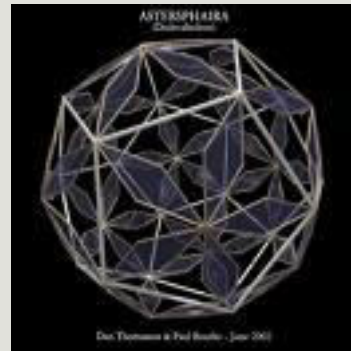
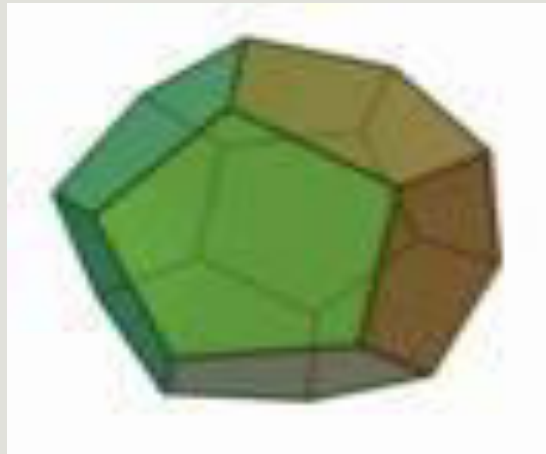
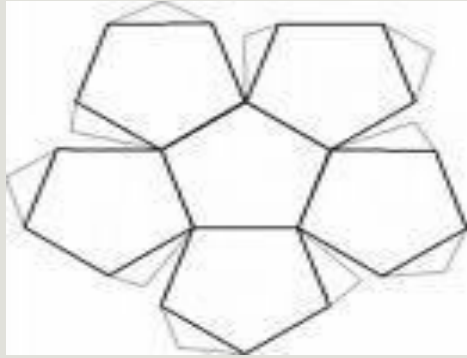
(a)



(b)



(c)

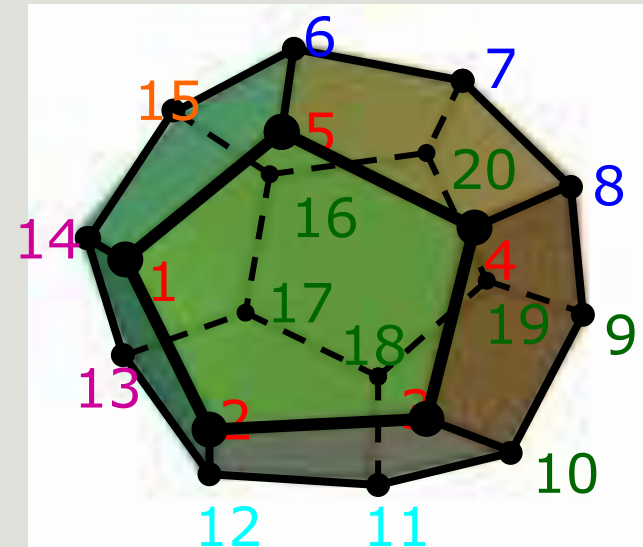


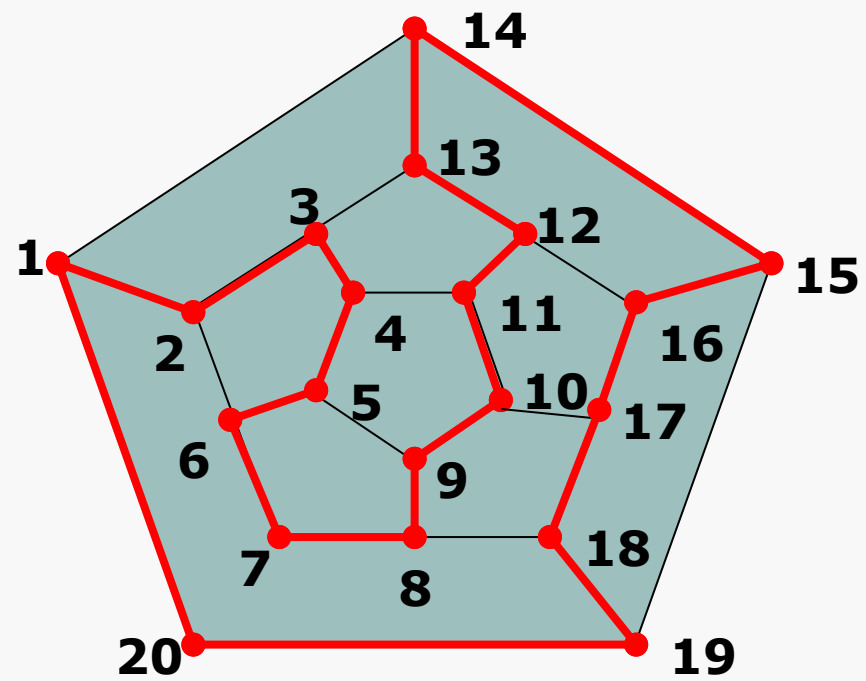
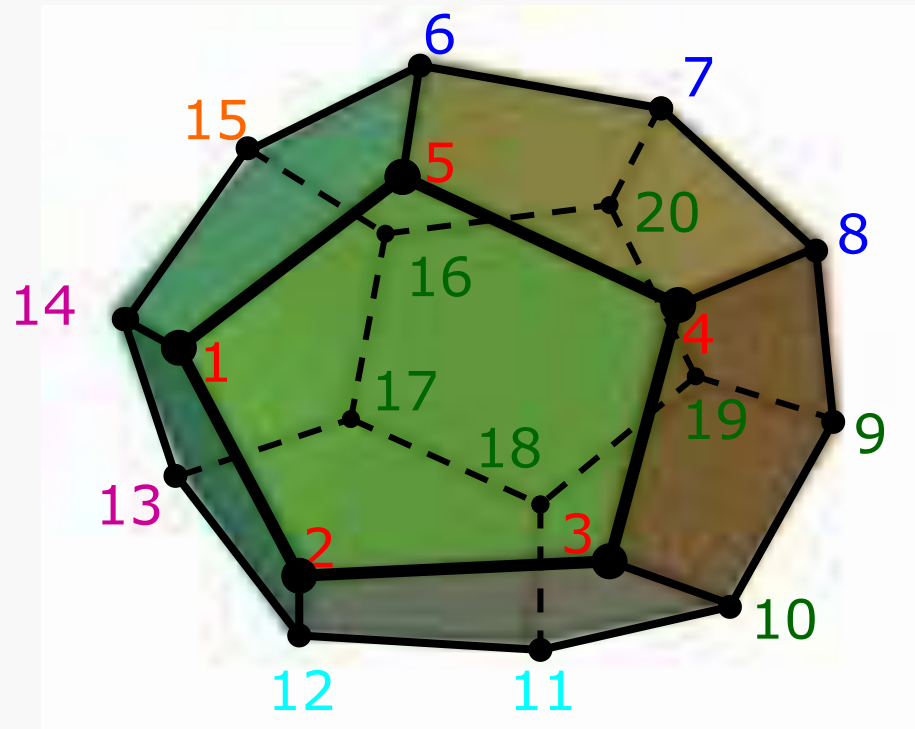
dodecahedron

Dodecahedron

Yaitu benda yang disusun oleh **12 buah pentagonal** dan disini ada **20 buah titik sudut**.

Dan tiap titik sudut diberi nama ibukota negara. Permainan yang dapat dilakukan adalah membentuk perjalanan keliling dunia, yang mengunjungi setiap ibukota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal.





Gambar 8.61

Teorema-teorema Hamilton

Teorema 8.6 (Teorema Dirac):

Syarat cukup supaya graf sederhana G dengan $n \geq 3$ buah simpul adalah **graf Hamilton** ialah bila derajat tiap simpul paling sedikit $n/2$ untuk setiap simpul di G .

Teorema 8.7: (Teorema Ore):

Jika G adalah graf sederhana dengan n buah simpul sedemikian sehingga $d(v) + d(u) \geq n$ untuk setiap simpul tidak bertetangga u dan v , maka G adalah **Graf Hamilton**.

Teorema 8.8:

Setiap graf lengkap adalah graf Hamilton.

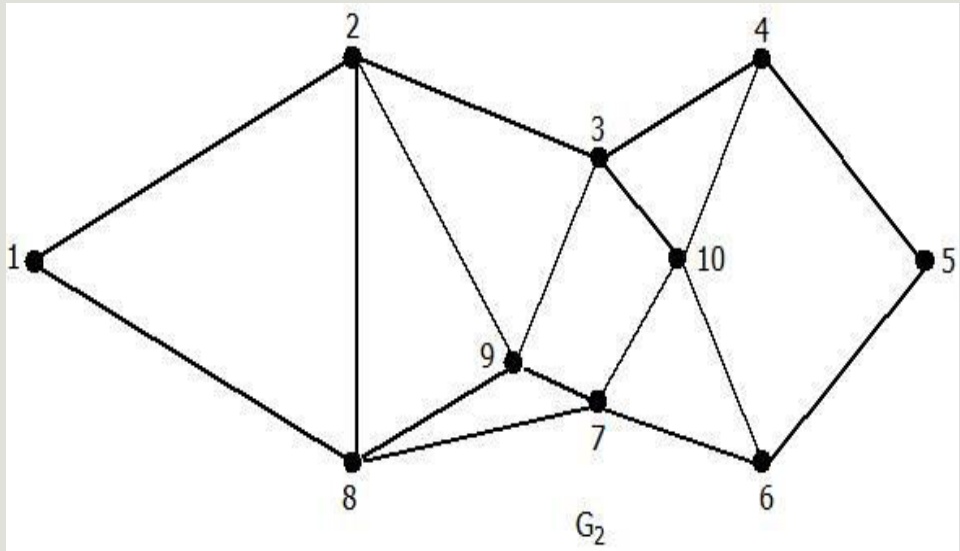
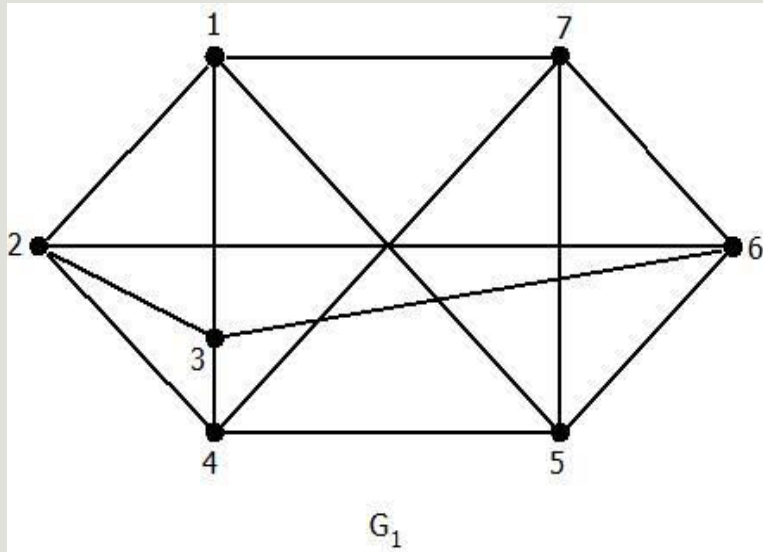
Teorema 8.9:

Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul $n \geq 3$, terdapat $(n-1)!/2$ buah sirkuit Hamilton.

Teorema 8.10:

Di dalam graf lengkap G dengan n buah simpul $n \geq 3$, terdapat $(n-1)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas (tidak ada sisi yang bersisian). Jika n genap $n \geq 4$, maka di dalam G terdapat $(n-2)/2$ buah sirkuit Hamilton yang saling lepas.

Periksa apakah graf-graf berikut merupakan graf Hamilton atau Semi Hamilton.
Jelaskan Pendapatmu.



LATIHAN SOAL A

Diketahui graf lengkap G dengan 4, 5, 6, dan 7 simpul.

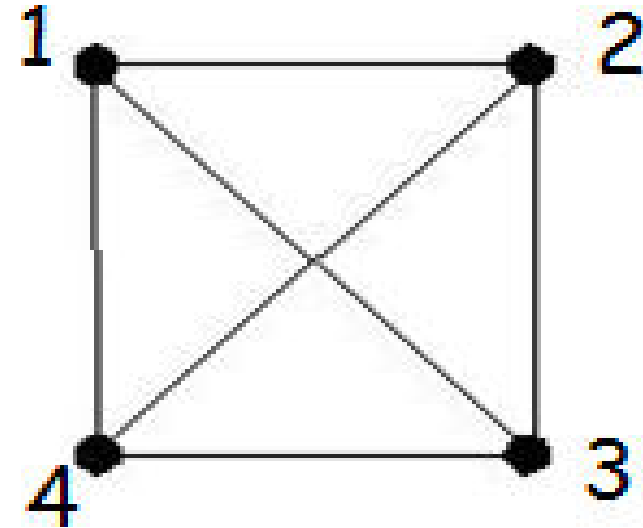
1. Berapa banyak sirkuit Hamilton pada graf G tersebut.
2. Berapa banyak sirkuit Hamilton yang saling lepas.
3. Gambarkan dan tuliskan sirkuitnya.

Contoh:

Perhatikan graf Hamilton dengan 4 simpul berikut:

Menurut Teorema 8.9:

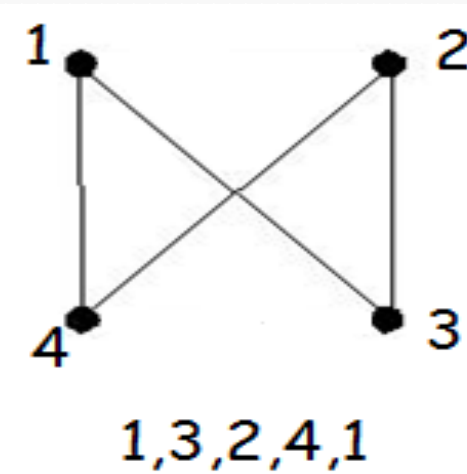
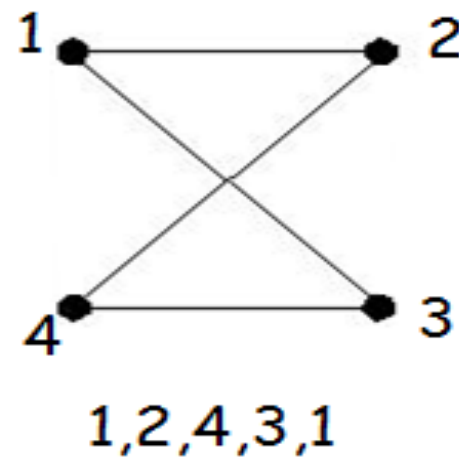
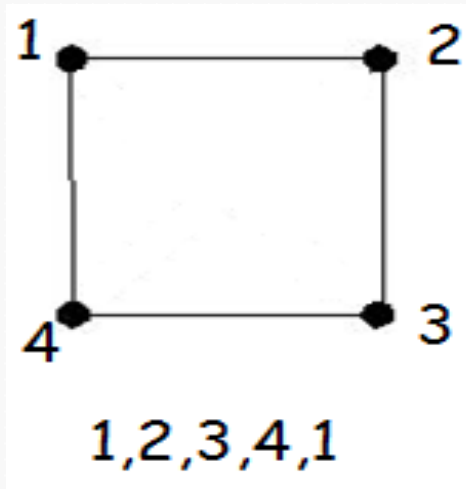
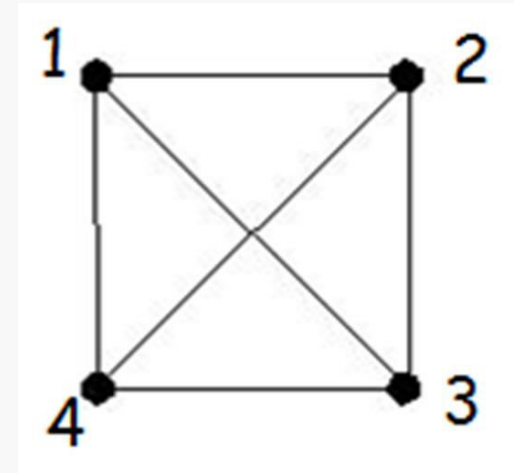
$$\text{Banyak sirkuit Hamilton} = \frac{(n-1)!}{2} = \frac{3!}{2} = 3.$$



Menurut Teorema 8.10:

$$\text{Jika } n \text{ genap banyak sirkuit hamilton yang saling lepas} = \frac{(n-2)}{2} = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Dari graf Hamilton dengan 4 simpul berikut, diperoleh 3 sirkuit Hamilton (yang tidak saling lepas), yang sirkuitnya dapat digambarkan dalam graf berikut ini:

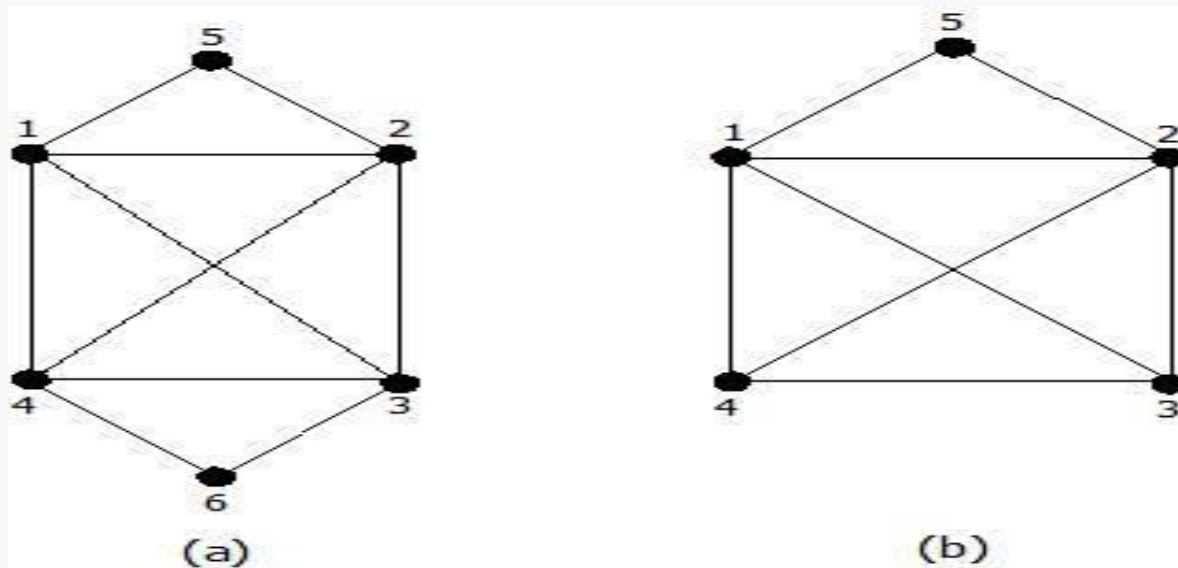


LATIHAN SOAL B

Tujuh orang mahasiswi bertemu setiap minggu untuk belajar memasak. Instruktur masakannya mengharuskan setiap peserta untuk duduk dengan tetangga duduk yang berbeda setiap minggunya. Agar setiap peserta bisa mengenal satu sama lain. Berapa minggu waktu yang diperlukan oleh para peserta tersebut untuk mengenal satu sama lain? Nyatakan permasalahan tersebut dalam bentuk graf lengkap, lalu gambarkan posisi duduk dari setiap peserta tersebut.

LATIHAN SOAL C

Perhatikan graf berikut ini. Selidiki satu persatu, apakah kedua graf tersebut merupakan graf Euler, graf semi Euler, graf Hamilton, graf semi Hamilton atau bukan kedua-duanya. Tuliskan lintasannya, bila ada.



Rangkuman Sirkuit dan Lintasan Euleur dan Hamilton

1. Lintasan: simpul awal \neq simpul akhir
2. Sirkuit: simpul awal = simpul akhir
3. Graf yang mempunyai sirkuit Euler: Graf Euler (*Eulerian Graph*)
4. Graf yang mempunyai lintasan Euler: Graf Semi Euler (*Semi Eulerian Graph*)
5. Graf yang mempunyai sirkuit Hamilton: Graf Hamilton (*Hamiltonian Graph*)
6. Graf yang mempunyai lintasan Hamilton : Graf Semi Hamilton (*Semi Hamiltonian Graph*)

DAFTAR PUSTAKA

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.