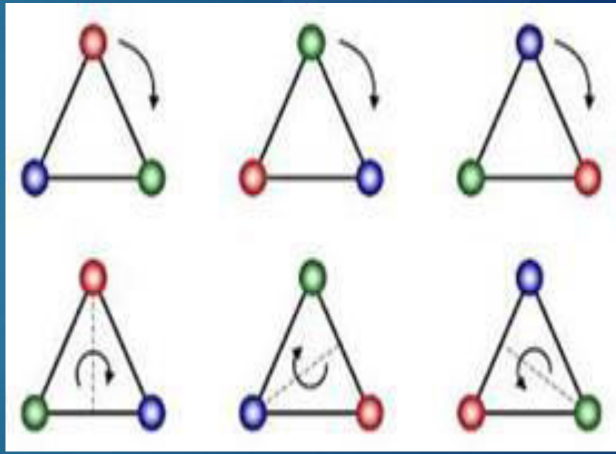
PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN SAINS
IKIP SILIWANGI

BAB 1 GRUP



Dr. Rippi Maya, M.Pd.

OPERASI BINER

Definisi 1.1: Operasi Biner

Misalkan G suatu himpunan tak kosong. **Operasi biner** * pada himpunan G adalah suatu fungsi (pemetaan) yang mengkaitkan setiap pasangan terurut dari elemen di G ke elemen di G.

Dengan kata lain, operasi biner * pada himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \rightarrow G$ dari produk Cartesius $G \times G \equiv \{(a,b) \mid a,b \in G\}$, ke himpunan G.

GRUP

Definisi 1.2: Grup

Sebuah **grup** adalah sebuah pasangan terurut $(G,*)$, dengan G adalah sebuah himpunan tak kosong dan * adalah sebuah operasi biner pada G, yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. **Asosiatif**. Operasi tersebut bersifat asosiatif, yaitu $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua a, b, c di G.
2. **Identitas**. Terdapat suatu elemen e (disebut identitas) di G, sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua a di G.
3. **Invers**. Untuk setiap elemen a di G, terdapat suatu elemen b di G (disebut invers) sehingga $a*b = b*a = e$.

Bilangan bulat modulo *n*

(a) Jika a dan b bilangan bulat dan n bilangan bulat positif, bilangan a disebut **modulo** n terhadap b jika n habis membagi $a - b$, dan ditulis $\boldsymbol{a = b} \bmod \boldsymbol{n}$. Sebagai contoh, $10 \equiv 1$ mod 3, karena $10 - 1 = 3q$, dan $14 \equiv 2$ mod 4, karena $14 - 2 = 4q$, dengan q adalah kuosien (hasil bagi).

(b) Pada modulo, dikenal juga operasi **penjumlahan dan perkalian mod *n***, yang dinyatakan dengan $(a+b) \bmod n$ dan $ab \bmod n$. Ditulis,

$$(a+b) \bmod n = \big((a \bmod n) + (b \bmod n)\big) \bmod n, \text{ dan}$$

$$ab \bmod n = \big((a \bmod n)(b \bmod n)\big) \bmod n.$$

Sebagai contoh,

$$
\begin{aligned}
(12+15) \text{ mod } 10 &= ((12 \text{ mod } 10) + (15 \text{ mod } 10)) \text{ mod } 10 \\
&= ((2 \text{ mod } 10) + (5 \text{ mod } 10)) \text{ mod } 10 \\
&= 7 \text{ mod } 10 \\
&= 7.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13 \cdot 27) \bmod 10 &= ((13 \bmod 10)(27 \bmod 10)) \bmod 10 \\
&= (3 \cdot 7) \bmod 10 \\
&= 21 \bmod 10 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Untuk selanjutnya, 27 mod 10 = 7 mod 10.

(a) $ab \bmod n$ adalah bilangan bulat r dengan sifat $a \cdot b = nq + r$, dengan $0 \le r < n$, dan $a \cdot b$ adalah perkalian biasa. Bilangan bulat a mempunyai invers **perkalian modulo n** jika dan hanya jika a dan n prima relatif. Pada contoh perkalian modulo 10 di atas, 7 adalah invers perkalian modulo 10 dari 3, karena 10 dan 3 adalah prima relatif.

Contoh:

Dengan menggunakan tabel Cayley, periksa apakah himpunan $Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, \ldots, Z_n$ membentuk grup terhadap operasi penjumlahan modulo n. Apakah yang dapat Anda simpulkan dari tabel Cayley $(Z_n, +)$?

Latihan

Latihan 1.13

Selidiki apakah $(Z_n \setminus \{0\}, \times)$ untuk $n = 2,3,4$ membentuk grup? Jelaskan jawabmu!

Latihan 1.14

Jelaskan mengapa himpunan $\{1,2,3\}$ di bawah perkalian modulo 4 bukan grup tetapi $\{1,2,3,4\}$ di bawah perkalian modulo 5 merupakan grup.

Latihan 1.15

Buatlah tabel Cayley untuk $\mathbb{Z}_6$ terhadap operasi perkalian.

(a) Apakah $\mathbb{Z}_6$ grup terhadap perkalian?

(b) Elemen manakah dari $\mathbb{Z}_6$ yang mempunyai invers dan manakah yang tidak?

Latihan 1.16

Kerjakan hal yang sama seperti pada nomer 1.17, tetapi untuk $\mathbb{Z}_7$ dan $\mathbb{Z}_{10}$.

Grup Abelian

Definisi 1.3: Grup Abelian

Grup $(G,*)$ disebut **abelian** (**komutatif**) jika $a*b = b*a$ untuk semua a, b di G.

Latihan 1.20

Jika G grup yang mempunyai tiga elemen, maka G pasti abelian. Selidiki kebenaran pernyataan tersebut.

Latihan 1.21

Misalkan G sebuah grup dengan sifat-sifat sebagai berikut: Jika a, b, dan c adalah elemen-elemen dari G, dan $ab = ca$, maka $b = c$. Buktikan bahwa G adalah Abelian.

Prima Relatif

Definisi 1.3: Prima Relatif

Suatu bilangan bulat positif a dikatakan **prima relatif** dengan n, bila faktor persekutuan terbesarnya dengan n adalah 1. Dengan kata lain, FPB $(a,n) = 1$.

Latihan 1.22

Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kurang dari 10. Sebutkan semua anggota A yang prima relatif dengan 10, tuliskan sebagai himpunan B.

Latihan 1.23

Terhadap perkalian modulo 10, selidiki apakah B membentuk grup.

Catatan:

Himpunan $U(n)$ adalah sebagai himpunan semua bilangan bulat positif yang lebih kecil dari n dan prima relatif ke n, untuk setiap $n > 1$, $n \epsilon \mathbb{Z}^+$.

Contoh:

$$U(2) = \{1\},$$
$$U(3) = \{1,2\},$$
$$U(4) = \{1,3\},$$
$$U(5) = \{1,2,3,4\},$$
$$U(6) = \{1,5\},$$
$$U(16) = \{\quad\}.$$

Latihan 1.25

Buatlah tabel Cayley untuk $U(10)$ terhadap operasi perkalian modulo 10.

(a) Carilah elemen identitasnya dan selidiki apakah elemen identitasnya tunggal?

(b) Sebutkan unsur-unsur yang saling invers dari elemen-elemen pada $U(10)$, bila ada. Apakah inversnya tunggal?

(c) Selidiki apakah $U(10)$ merupakan grup terhadap operasi perkalian modulo 10? Bagaimana pula dengan $U(12)$ terhadap operasi perkalian modulo 12 dan $U(15)$ terhadap operasi perkalian modulo 15?

(d) Kesimpulan apakah yang dapat Anda ambil dari beberapa contoh $U(n)$ tersebut?

Sifat-sifat Elementer Grup

Teorema 1.1: Ketunggalan Identitas

Dalam sebuah grup G, hanya ada satu elemen identitas.

Bukti:

Andaikan ada dua elemen identitas di G, yaitu e dan e'. Maka

1. $ea = ae = a$ untuk semua a di G, dan
2. $e'a = ae' = a$ untuk semua a di G.

Akan ditunjukkan bahwa $e = e'$.

Jika e sebagai identitas, maka $ee' = e'$, tetapi jika e' sebagai identitas, maka $ee' = e$.

Dengan mengkombinasikan keduanya yaitu $e' = ee' = e$, dapat ditunjukkan bahwa

$e' = e\ (tunggal)$. (Terbukti)

Teorema 1.2: Pembatalan

Dalam sebuah grup G, hukum pembatalan kanan dan kiri berlaku, yaitu $ba = ca$ mengakibatkan $b = c$, dan $ab = ac$ mengakibatkan $b = c$.

Bukti:

Misalkan $ba = ca$

Misalkan a' adalah invers dari a.

Dengan mengalikan a' pada kedua ruas, diperoleh

$$(ba)a' = (ca)a'.$$

$$b(aa') = c(aa') \quad \text{(sifat asosiatif)}$$

$$be = \text{ce} \Rightarrow b = c.$$

Dengan cara yg sama, misalkan $ab = ac$. Dengan mengalikan masing-masing ruas dengan a' di setiap ruas, akan diperoleh $b = c$. Jadi teorema terbukti.

Teorema 1.3: Ketunggalan Invers

Untuk setiap elemen a dalam sebuah grup G, ada elemen tunggal b dalam G, sehingga $ab = ba = e$.

Bukti:

Misalkan b dan c adalah invers dari a.

Maka $ab = e$ dan $ac = e$. Artinya $ab = ac$.

Berdasarkan Teorema pembatalan kiri, disimpulkan bahwa $b = c$ (invers tunggal)

Teorema 1.1: Sifat Sepatu-Kaos Kaki

Untuk setiap elemen a dan b dalam sebuah grup G, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Bukti:

Misalkan $a, b \in G$.

Maka $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$.

Dengan cara yang sama, $b^{-1}a^{-1}ab = e$.

Karena inversnya tunggal, maka $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Jadi Teorema 1.4 terbukti.

Latihan 1.29

Buktikan bahwa sebuah grup G adalah Abelian jika dan jika $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, untuk semua a dan b di G.

Daftar Pustaka

Gallian, Joseph A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra* (Ninth Edition). Boston, USA.: Cengage Learning.

Hungerford, Thomas W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Judson, Thomas W. (1993). Abtract Algebra: Theory and Application. [Online]. Tersedia: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=A623CCFB14FFAF159889A8F01A28EA3D [29 Maret 2011]