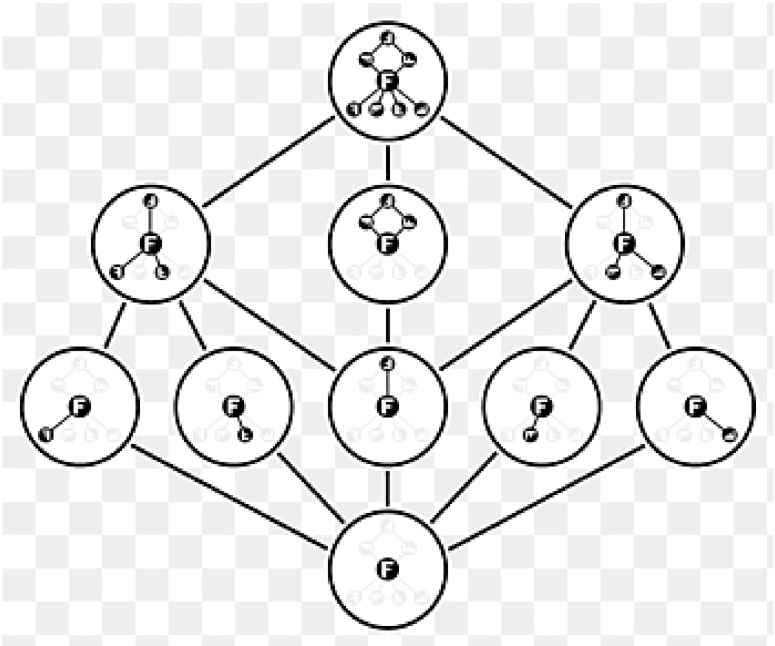
Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika Dan Sains
IKIP Siliwangi



Bab 2_Sub Grup

Struktur Aljabar

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Orde Grup

Definisi 2.1: Orde dari sebuah Grup

Orde dari sebuah grup G, dinyatakan dengan $|G|$, adalah banyaknya elemen dari sebuah grup G (berhingga atau tak berhingga).

Latihan 2.1

Berikan contoh orde dari beberapa grup, seperti grup himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan, $\mathbb{Z}_{12}$, $U(10)$, dan sebagainya.

$g^n = e.$

Orde Elemen Grup

Definisi 2.1: Orde dari suatu Elemen

Jika G sebuah grup dan $g \in G$, maka **orde dari elemen** g tersebut adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e.$ Notasinya: $|g| = n.$

Elemen g dikatakan mempunyai **orde takhingga**, jika tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi persamaan tersebut.

Catatan:

Untuk operasi penjumlahan pada himpunan G, $g^n = e$ dituliskan sebagai: $n.g = e$.

Latihan

Latihan 2.1

Hitunglah orde dari grup $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, dan orde elemen-elemennya terhadap penjumlahan modulo 10.

Latihan 2.2.:

Hitunglah orde grup dan orde elemen dari grup $(\mathrm{Z}_7, \times)$ dan U(10).

Latihan 2.3:

Hitunglah orde $U(15)$ dan orde elemen-elemennya terhadap perkalian modulo 15.

Petunjuk:

Untuk memudahkan penghitungan, gunakan trik berikut. Misalkan kita akan menghitung orde elemen 13. Perhatikan bahwa $13 = -2 \text{ modulo } 15$, karena $13+2=0$ modulo 15, sehingga $13^2 = (-2)^2 = 4$, $13^3 = 13 \cdot 13^2 = (-2) \cdot 4 = -8$, $13^4 = 13 \cdot 13^3 = (-2) \cdot (-8) = 1$. Jadi orde elemen 13 adalah 4.

$$11 = -4 \; modulo \; 15, \text{karena } 11 + 4 = 0 \text{ modulo } 15, \text{sehingga}$$

$$11^2 = (-4)^2 = 16 \; modulo \; 15 = 1$$

Jadi orde elemen 11 adalah 2.

Ilustrasi 2.1:

Diketahui himpunan $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan table Cayleynya (Tabel 2.1). Dari Z_6 tersebut dibuat himpunan lain, sebut saja G, dengan elemen-elemennya sama dengan Z_6, tetapi elemennya ditulis tidak urut, yaitu $G = \{0,2,4,1,3,5\}$.

Misalkan *H* dan *K* adalah subset dari grup *G* tersebut, dengan $H = \{0, 2, 4\}$ dan $K = \{1, 3, 5\}$. Dengan melihat tabel Cayley tersebut, Anda dapat menentukan manakah di antara *H* dan *K* yang mempunyai sifat-sifat seperti grup *G*. Apakah yang dapat Anda simpulkan tentang *H* dan *K*?

Perhatikan tabel Cayley dari kedua grup Abelian $(Z_6, +)$ dan (G,+) berikut. Apakah yang dapat disimpulkan dari kedua tabel tersebut?

Tabel 2.1
Tabel Cayley dari grup Abelian $(Z_6, +)$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabel 2.2
Tabel Cayley dari grup Abelian (G,+)

+	0	2	4	1	3	5
0	0	2	4	1	3	5
2	2	4	0	3	5	1
4	4	0	2	5	1	3
1	1	3	5	2	4	0
3	3	5	1	4	0	2
5	5	1	3	0	2	4

Definisi 2.1: Subgrup

Himpunan tak kosong H adalah subset dari sebuah grup G. H dikatakan **subgrup** dari G jika H merupakan grup terhadap operasi yang sama di G.

Catatan:

Notasi yang biasa digunakan untuk menyatakan bahwa H merupakan subgrup dari G adalah: $H \leq G$. Bila H subgrup dari G tetapi tidak sama dengan G disebut **subgrup murni** (*proper subgrup*), dan ditulis $H < G$.

Keterangan:

Subgrup $\{e\}$ disebut **subgrup trivial** dari G. Bila ada subgrup lain dalam grup G yang bukan $\{e\}$, maka subgrup tersebut dikatakan **subgrup nontrivial** dari G. Pada Ilustrasi 2.1 tersebut di atas, H merupakan subgrup nontrivial dari G.

Latihan:

1. $\mathbb{Z}_7 - \{0\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian. Selidiki apakah $\mathbb{Z}_7 - \{0\}$ tersebut mempunyai subgrup nontrivial.

2. Perhatikan himpunan-himpunan P, Q dan R berikut, dengan $P = \{0,5\}$, $Q = \{0,2,4,6,8\}$ dan $R = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Himpunan-himpunan P, Q dan R tersebut merupakan subset dari grup $\mathbb{Z}_{10}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 10. Selidiki manakah dari ketiga subset tersebut yang merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_{10}$.

Tes Subgrup

Teorema 3.1: Tes Subgrup Satu-Tahap

Misalkan H adalah subset tak kosong dari suatu grup G. H adalah subgrup dari G jika ab^{-1} di H, untuk setiap a dan b di H.

Catatan:

Untuk notasi penjumlahan, H adalah subgrup jika $a - b$ di H untuk setiap a, b di H.

Bukti Tes Subgrup Satu-Tahap

Karena operasi di H sama seperti operasi di G, maka jelas bahwa operasinya bersifat asosiatif. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa e ada di H.

Karena H tak kosong, maka dapat diambil sebarang x di H. Misalkan $a = x \, dan \, b = x$ dalam hipotesis, maka $e = xx^{-1} = ab^{-1}$ di H. Artinya ada identitas di H.

Untuk menunjukkan bahwa x^{-1} ada di H, jika x ada di H, yang perlu dilakukan adalah memilih $a = e$ dan $b = x$, sehingga $x^{-1} = e.x^{-1} = ab^{-1}$ di H. Artinya untuk setiap x di H, inversnya ada di H.

Untuk menunjukkan bahwa H tertutup terhadap operasi di H adalah jika x, y anggota H, maka xy juga ada di H. Dari penjelasan tentang invers sebelumnya telah ditunjukkan bahwa y^{-1} ada di H, jika y ada di H. Dengan memisalkan $a = x$ dan $b = y^{-1}$, maka diperoleh $xy = x(y^{-1})^{-1} = ab^{-1}$ ada di H.

Latihan Soal

Misalkan G grup Abelian terhadap perkalian dengan identitas e. Bila H dan K adalah subset dari G, dengan $H = \left\{ x^2 \,\middle|\, x \in G \right\}$ dan $K = \left\{ x \in G \,\middle|\, x^2 = e \right\}$, buktikan bahwa H dan K merupakan subgrup dari G.

Bukti:

G grup Abel (Abelian) dengan e di G dan $H = \{x^2 | x \in G\}$.

Karena $e = e^2$ maka $e \in H$ (H tak kosong).

Misalkan a^2 dan b^2 di H. Untuk menunjukkan H subgroup dari G, cukup menggunakan Teorema Subrup Satu Tahap, yaitu $a^2(b^2)^{-1}\ di\ H$.

Karena G Abelian, maka $(b^2)^{-1} = (b^{-1})^2$, sehingga $a^2(b^2)^{-1} = a^2(b^{-1})^2 = (ab^{-1})^2 \in H$.

Jadi H subgroup dari G.

Bukti:

G grup Abel (Abelian) dengan e di G, $\mathrm{K} = \{x \in G | x^2 = e\}$.

Karena $e = e^2$ maka $e \in K$ (*K* tak kosong).

Misalkan a dan b di *K*. Artinya $a^2 = e \; dan \; b^2 = e$.

Dengan menggunakan Teorema Subrup Satu Tahap, cukup ditunjukkan bahwa $ab^{-1} \; di \; K$.

Karena G Abelian, maka $(ab^{-1})^2 = ab^{-1}. ab^{-1} = a^2(b^{-1})^2 = a^2(b^2)^{-1} = ee^{-1} = e$.

Jadi $ab^{-1} \in K$. Menurut Teorema Subgrup Satu Tahap, *K* merupakan subgroup dari G.

Tes Subgrup Dua-Tahap

Teorema 2.2: Tes Subgrup Dua-Tahap

Misalkan H adalah subset tak kosong dari suatu grup G. H adalah subgrup dari G jika $ab \in H$, untuk setiap $a, b \in H$ (tertutup terhadap operasi perkalian) dan $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a \in H$ (tertutup terhadap pengambilan invers-inversnya).

Bukti:

Karena H tidak kosong, operasi dari H adalah asosiatif, H tertutup dan setiap elemen di H mempunyai invers di H, tinggal ditunjukkan bahwa ada identitas di H. Misalkan a adalah elemen di H. Karena a^{-1} ada di H, maka $aa^{-1} = e$ ada di H (terbukti).

Latihan Soal

Misalkan G adalah grup dari bilangan-bilangan riil tak nol terhadap operasi perkalian. P dan Q adalah subset dari grup G, dengan $P = \left\{ x \in G \,\middle|\, x \geq 1 \right\}$ dan $Q = \left\{ x \in G \,\middle|\, x = 1 \text{ atau } x \text{ irasional} \right\}$. Dengan menggunakan Teorema 2.1, selidiki apakah P dan Q subgrup dari G.

Jawab:

Diketahui $P = \{x \in G | x = 1 \text{ atau } x\ irasional\}$.

Karena $\sqrt{2} \in P$, tetapi $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2 \notin P$, maka menurut Teorema Subgrup Dua Tahap, P bukan subgroup dari G.

Diketahui $Q = \{x \in G | x \geq 1\}$.

Karena $2 \in Q, tetapi\ 2^{-1} \notin Q$, maka maka menurut Teorema Subgrup Dua Tahap, Q bukan subgroup dari G.

Tes Subgrup Berhingga

Teorema 2.2: Tes Subgrup Berhingga

Misalkan H adalah subset berhingga tak kosong dari suatu grup G, maka H adalah subgrup dari G jika H tertutup terhadap operasi di G.

Bukti:

Menurut Teorema 2.2, perlu ditunjukkan bahwa $a^{-1} \in H$, untuk setiap $a \in H$.

Jika $a = e$, maka $a^{-1} = a$ dan bukti selesai.

Jika $a \neq e$, perhatikan barisan $a, a^2, \ldots$.

Dari sifat ketertutupan, semua elemen dalam barisan tersebut ada di H.

Karena H berhingga, tidak semua elemennya berbeda.

Nyatakan $a^i = a^j$ dan $i > j$. Maka $a^{i-j} = e$. Karena $a \neq e$, maka $i - j > 1$. Jadi $aa^{i-j-1} = a^{i-j} = e$. Dengan kata lain, $a^{i-j-1} = a^{-1}$. Tetapi $i - j \geq 1$ mengakibatkan $a^{i-j-1} \in H$ (Bukti selesai).

Daftar Pustaka

Gallian, Joseph A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra* (Ninth Edition). Boston, USA.: Cengage Learning.

Hungerford, Thomas W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Judson, Thomas W. (1993). Abtract Algebra: Theory and Application. [Online]. Tersedia: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=A623CCFB14FFAF159889A8F01A28EA3D [29 Maret 2011]