Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika Dan Sains
IKIP Siliwangi

BAB 3 GRUP SIKLIS

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

Semester 5

Tahun Akademik 2020-2021

3.1 Sifat-sifat Grup Siklis

Ilustrasi 3.1:

Perhatikan grup $U(14)=\{1,3,5,9,11,13\}$ terhadap perkalian modulo 14, dengan orde grup $|U(14)|=6.$ Dengan menghitung orde beberapa elemennya, diketahui bahwa $|3|=6$ dan $|9|=3.$ Pada penentuan orde elemen 3, penjabarannya dapat dituliskan sebagai berikut: $3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=13,\ 3^4=3.3^3=3.(-1)=-3 \bmod 14,$ $3^5=3.3^4=3.(-3)=-9 \bmod 14=5,\ 3^6=3.3^5=3.5=1.$

Kalau perpangkatan dari 3 ini dilanjutkan untuk pangkat positif, maka akan diperoleh $3^7=3,\ 3^8=9,\ 3^9=13,\ 3^{10}=11,\ 3^{11}=5,\ 3^{12}=1,$ dan seterusnya. Sementara kalau perpangkatan dari 3 dilanjutkan untuk pangkat negatif, maka akan diperoleh: $3^0=1,\ 3^{-1}=5$ (invers dari 3 terhadap perkalian modulo 14 adalah 5), $3^{-2}=\left(3^{-1}\right)^2=5^2=25 \bmod 14=11,$ $3^{-3}=\left(3^{-1}\right)\left(3^{-2}\right)=5.11=55 \bmod 14=13,$ $3^{-4}=\left(3^{-2}\right)^2=(11)^2=9,$ dan seterusnya.

Kalau elemen-elemen tersebut diurutkan, maka akan diperoleh barisan elemen sebagai berikut: …,3,9,13,11,5,1,3,9,13,11,5,1,3,9,13,11,5,1,… Perhatikan bahwa elemen-elemen barisan tersebut membentuk beberapa siklus dari 3,9,13,11,5,1. Dari penjabaran perpangkatan (untuk operasi perkalian) dari elemen 3 tersebut, konsep siklis diperkenalkan. Untuk lebih jelasnya, konsep siklis didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1:

Suatu grup G disebut **grup siklis** jika ada suatu elemen $\boldsymbol{a}$ di G sehingga $G = \langle a \rangle$ dengan $\langle a \rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ Elemen $\boldsymbol{a}$ tersebut dinamakan **generator** dari G dan G disebut grup siklis yang dibangun (*generated*) oleh a.

Catatan: untuk notasi penjumlahan, $\langle a \rangle = \{n.a | n \in \mathbb{Z}\}$.

Latihan 3.1

Setelah memahami Definisi 3.1 tersebut,

a. cobalah selidiki generator dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan biasa.

b. Tentukan juga generator dari himpunan-himpunan $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$, dan $\mathbb{Z}_7$, terhadap operasi penjumlahan modulo 3, 5 dan 7.

c. Demikian juga untuk himpunan-himpunan $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi penjumlahan modulo 4, 6 dan 8.

d. Dapatkah Anda menentukan generator dari $\mathbb{Z}_n$ $(n \geq 1)$ secara umum? Apakah grup-grup $\mathbb{Z}_n$ tersebut merupakan grup siklis? Jelaskan pendapatmu.

Latihan 3.2:

Tentukan juga generator dari himpunan-himpunan,

a. $U(3), U(5)$ dan $U(7)$ terhadap operasi perkalian modulo 3, 5 dan 7.

b. Demikian juga untuk himpunan-himpunan $U(4), U(6)$ dan $U(8)$ terhadap operasi perkalian modulo 4, 6 dan 8.

Dapatkah Anda menentukan generator dari $U(n)$ $(n \geq 1)$ secara umum? Apakah grup-grup $U(n)$ tersebut merupakan grup siklis? Jelaskan pendapatmu

Latihan 3.3:

Buktikan bahwa $U(20)$ bukan grup siklis.

Latihan 3.4:

Perhatikan grup siklis $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5, U(5)$ dan $U(6)$. Gunakan tes subgrup berhingga untuk menyelidiki apakah siklis-siklis dalam grup-grup tersebut membentuk subgrup. Apakah kesimpulan dari hasil penyelidikanmu?

Teorema 3.1: $\langle a \rangle$ adalah Subgrup

Misalkan G suatu grup, dan a adalah elemen dari G, maka $\langle a \rangle$ adalah subgrup dari G.

Bukti Teorema 3.1:

Karena $a \in \langle a \rangle$, maka $\langle a \rangle$ tidak kosong.

Misalkan $a^n, a^m \in \langle a \rangle$.

Maka $a^n(a^m)^{-1} = a^{n-m} \in \langle a \rangle$.

Menurut Teorema Subgroup Satu tahap, $\langle a \rangle$ adalah subgroup dari *G*.

Latihan 3.5

Tunjukkan bahwa $\langle 3 \rangle$ merupakan subgrup siklis dari $\mathbb{Z}_{10}$ terhadap operasi penjumlahan modulo 10.

Latihan 3.6

Tunjukkan bahwa $\langle 3 \rangle$ subgrup siklis dari $U(10)$ terhadap operasi per modulo 10.

Latihan 3.7

Tunjukkan bahwa $U(15)$ mempunyai enam subgrup siklis yang berbeda.

Latihan 3.8

Tunjukkan bahwa $U(14) = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$ dan selidiki apakah $U(14) = \langle 11 \rangle$.

Latihan 3.5

Tuliskan semua elemen dari subgrup $\langle 20 \rangle$ dan $\langle 10 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{30}$. Tuliskan juga semua elemen dari subgrup $\langle 3 \rangle$ dan $\langle 15 \rangle$ di $\mathbb{Z}_{18}$.

Latihan 3.6

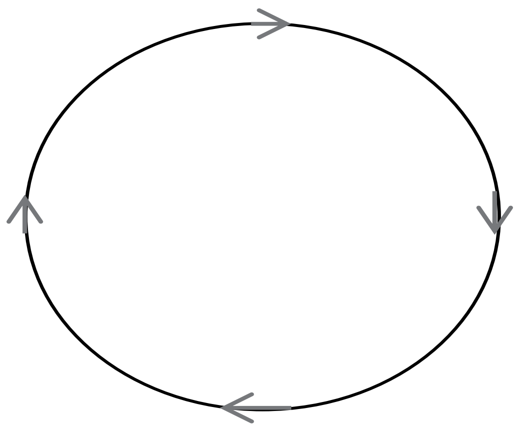
Tuliskan semua elemen dari subgrup $\langle 2 \rangle$ dan $\langle 3 \rangle$ di $U(5)$. Sebutkan pula semua elemen dari subgrup $\langle 3 \rangle$ dan $\langle 7 \rangle$ di $U(20)$.

Ilustrasi 3.1:

Perhatikan gambar berikut, dengan $|a| = 4$.

$$\boxed{\ldots = a^{-4} = a^{0} = a^{4} = \ldots}$$

$$\boxed{\ldots = a^{-3} = a^{1} = a^{5} = \ldots}$$



$$\boxed{\ldots = a^{-1} = a^{3} = a^{7} = \ldots}$$

$$\boxed{\ldots = a^{-2} = a^{2} = a^{6} = \ldots}$$

Gambar 3.1

Teorema 3.2: Kriteria untuk $a^i = a^j$

Misalkan G adalah suatu grup dan a adalah elemen dari G. Jika a mempunyai orde tak hingga, maka semua pangkat berbeda dari a adalah elemen-elemen grup yang berbeda. Jika a mempunyai orde yang berhingga, sebut saja n, maka $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$ dan $a^i = a^j$ jika dan hanya jika n membagi i-j.

Akibat 3.1: $|a| = |\langle a \rangle|$

Untuk suatu elemen a dari suatu grup G, berlaku $|a| = |\langle a \rangle|$.

Akibat 3.2: $a^k = e$ mengimplikasikan bahwa $|a|$ membagi *k*

Misalkan G adalah suatu grup dan a suatu elemen berorde n di G. Jika $a^k = e$, maka n membagi k.

Latihan 3.12

Pahami Akibat Teorema 3.2 tersebut. Selidiki pernyataan akibat tersebut untuk grup $U(5)$ dan $U(10)$. Bagaimana pendapatmu? Kerjakan dengan cara yang sama untuk 2 grup lain yang berbeda.

Teorema 3.3: Generator dari Grup Siklis

Misalkan $G = \langle a \rangle$ adalah suatu grup siklis berorde n. Maka $G = \langle a^k \rangle$ jika dan hanya jika gcd (k, n) = 1.

Akibat 3.3: Generator dari $\mathbb{Z}_n$

Suatu bilangan bulat k di $\mathbb{Z}_n$ adalah generator dari $\mathbb{Z}_n$ jika dan hanya jika gcd (k, n) = 1.

3.2 Klasifikasi Subgrup dari Grup Siklis

Ilustrasi 3.4:

Perhatikan kembali subgrup siklis $\langle 2 \rangle$ dari grup siklis $U(9)=\{1,2,4,5,7,8\}$.

Elemen-elemen dari subgrup siklis $\langle 2 \rangle$ adalah

$$\langle 2 \rangle = \langle 2^1 \rangle = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\} = \{2,4,8,7,5,1\} = \{1,2,4,5,7,8\}.$$

Elemen-elemen subgrup siklis lain dari $U(9)$ adalah:

$\langle 4 \rangle = \langle 2^2 \rangle = \{4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6\} = \{4,7,1\} = \{1,4,7\}$.

$\langle 8 \rangle = \langle 2^3 \rangle = \{8^1, 8^2, 8^3, 8^4, 8^5, 8^6\} = \{8,1\} = \{1,8\}$.

$\langle 1 \rangle = \langle 2^6 \rangle = \{1^1, 1^2\} = \{1,1\} = \{1\}$.

$\langle 5 \rangle = \langle 2^5 \rangle = \{5^1, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6\} = \{5,7,8,4,2,1\} = \{1,2,4,5,7,8\}$.

$\langle 7 \rangle = \langle 2^4 \rangle = \{7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6\} = \{7,4,1\} = \{1,4,7\}$.

Perhatikan bahwa subgrup siklis $\langle 4\rangle, \langle 8\rangle, \langle 1\rangle, \langle 5\rangle, \langle 7\rangle$ merupakan subgrup dari $\langle 2\rangle$. Orde subgrup-subgrup siklis dari $\langle 2\rangle$ tersebut adalah $\left|\langle 2\rangle\right| = \left|\langle 2^1\rangle\right| = 6$, $\left|\langle 4\rangle\right| = \left|\langle 2^2\rangle\right| = 3$, $\left|\langle 8\rangle\right| = \left|\langle 2^3\rangle\right| = 2$, $\left|\langle 1\rangle\right| = \left|\langle 2^6\rangle\right| = 1$, $\left|\langle 5\rangle\right| = \left|\langle 2^5\rangle\right| = 6$, $\left|\langle 7\rangle\right| = \left|\langle 2^4\rangle\right| = 3$.

Perhatikan bahwa orde subgrup-subgrup siklis tersebut adalah 1,2,3,6. Bandingkan dengan pembagi positif dari 6 (orde subgrup siklis $\langle 2\rangle$), yaitu $\{1,2,3,6\}$. Adakah kesamaan? Berikut ini adalah teorema dasar grup siklis yang perlu diketahui.

Teorema 3.4: Teorema Dasar Grup Siklis

Setiap subgrup dari suatu grup siklis adalah siklis. Jika $|\langle a \rangle| = n,$ maka orde suatu subgrup dari $\langle a \rangle$ adalah pembagi dari *n*; dan untuk masing-masing pembagi positif *k* dari *n*, grup $\langle a \rangle$ mempunyai **tepat satu subgrup berorde *k***, yang disebut $\langle a^{n/k} \rangle$.

Daftar Pustaka

Gallian, Joseph A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra* (Ninth Edition). Boston, USA.: Cengage Learning.

Hungerford, Thomas W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Judson, Thomas W. (1993). Abtract Algebra: Theory and Application. [Online]. Tersedia: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=A623CCFB14FFAF159889A8F01A28EA3D [29 Maret 2011]