PRODI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN SAINS
IKIP SILIWANGI

BAB 4_GRUP PERMUTASI-2

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

ILUSTRASI 4.4

Suatu permutasi identitas $\iota = (1)$ dapat dinyatakan sebagai (12)(12). Selain itu, juga dapat dinyatakan sebagai (13)(13) atau (14)(14), dst. Jadi suatu permutasi dalam S_n dapat dinyatakan sebagai hasil dari 2-putaran. Menurut Teorema 4.1, setiap permutasi dapat ditulis dalam bentuk $(a_1a_2...a_k)(b_1b_2...b_t)(c_1c_2...c_s)$. Dengan penghitungan langsung, permutasi tersebut juga dapat ditulis sebagai:

$$(a_1a_k)(a_1a_{k-1})...(a_1a_2)(b_1b_t)(b_1b_{t-1})...(b_1b_2)(c_1c_s)(c_1c_{s-1})...(c_1c_2),$$

yang merupakan hasil (*product*) 2-putaran.

Teorema 4.4 Hasil 2-Putaran

Setiap permutasi dalam S_n, $n > 1$, adalah hasil dari 2-putaran.

Contoh:

$$(12345) = (15)(14)(13)(12)$$
$$(1632)(457) = (12)(13)(16)(47)(45)$$

Latihan 4.14

Periksa kebenaran pernyataan ini: $\alpha = (12345) = (21)(25)(24)(23)$.

Jawab:

$\alpha = (12345) = (23451) = (21)(25)(24)(23)$.

Latihan 4.15

Periksa kebenaran pernyataan ini: $\alpha = (12345) = (45)(53)(25)(15)$.

Jawab:

$\alpha = (12345) = (51234) = (54)(53)(52)(51) = (45)(53)(52)(15)$

(Benar)

Lemma 4.1

Jika $\varepsilon = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_r$, dengan β adalah 2-putaran, maka r adalah genap.

Teorema 4.5: Selalu Genap atau Selalu Ganjil

Jika suatu permutasi α dapat dinyatakan sebagai hasil dari 2-putaran (saikel) yang jumlahnya genap (ganjil), maka setiap dekomposisi dari α ke dalam 2-putaran harus berjumlah genap (ganjil). Simbolnya:

$$\alpha = \beta_1\beta_2 \dots \beta_r \text{ dan } \alpha = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_s \ ,$$

dengan $\alpha \text{ dan } \beta$ adalah 2-putaran, maka r dan s keduanya genap atau keduanya ganjil.

Latihan 4.18

Perhatikan soal Latihan 4.14-16. Permutasi α tersebut dapat dinyatakan sebagai hasil 2-*putaran* yang jumlahnya genap. Dapatkah Anda membuat suatu contoh permutasi, yang dapat dinyatakan sebagai hasil 2-*putaran* yang jumlahnya ganjil?

Definisi 4.2 Permutasi Genap dan Ganjil

Suatu permutasi yang dapat dinyatakan sebagai hasil dari 2-putaran yang jumlahnya genap disebut **permutasi genap**. Suatu permutasi yang dapat dinyatakan sebagai hasil dari 2-putaran yang jumlahnya ganjil disebut **permutasi ganjil**.

Latihan 4.19

Permutasi dalam grup S_3 terdiri dari permutasi genap dan permutasi ganjil. Dapatkah Anda menyebutkan permutasi-permutasi tersebut? (Petunjuk: nyatakan permutasi dalam S_3 dalam bentuk hasil $2-$putaran, seperti dalam Ilustrasi 4.4, lalu tentukan apakah permutasi tersebut merupakan permutasi genap atau ganjil).

Latihan 4.20

Lakukan hal yang sama seperti pada soal Problem 4.19 pada grup S_4.

Teorema 4.6 Permutasi Genap Membentuk Grup

Himpunan permutasi genap dalam S_n membentuk subgrup dari S_n.

Latihan 4.22

Periksa apakah himpunan permutasi genap dalam S_3 membentuk subgrup dari S_3. Buatlah tabel Cayleynya terhadap operasi fungsi komposisi.

Latihan 4.23

Periksa apakah permutasi ganjil dalam S_3 membentuk subgrup? Jelaskan pendapatmu.

Definisi 4.3 Grup Berayun (*Alternating*) Derajat *n*

Grup permutasi genap dari n simbol dinyatakan dengan A_n dan disebut **grup berayun derajat *n*.**

Latihan 4.24

Tentukan grup berayun A_4. Buatlah tabel Cayley dari A_4 tersebut terhadap fungsi komposisi.

Latihan 4.25

Hitunglah order dari setiap elemen dalam A_4. Periksa apakah ada kaitan antara orde elemen dengan order A_4.

Table 5.1 The Alternating Group A_4 of Even Permutations of {1, 2, 3, 4}

(In this table, the permutations of A_4 are designated as $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12}$ and an entry k inside the table represents α_k. For example, $\alpha_3\,\alpha_8 = \alpha_6$.)

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}
$(1) = \alpha_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(12)(34) = \alpha_2$	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11
$(13)(24) = \alpha_3$	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10
$(14)(23) = \alpha_4$	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9
$(123) = \alpha_5$	5	8	6	7	9	12	10	11	1	4	2	3
$(243) = \alpha_6$	6	7	5	8	10	11	9	12	2	3	1	4
$(142) = \alpha_7$	7	6	8	5	11	10	12	9	3	2	4	1
$(134) = \alpha_8$	8	5	7	6	12	9	11	10	4	1	3	2
$(132) = \alpha_9$	9	11	12	10	1	3	4	2	5	7	8	6
$(143) = \alpha_{10}$	10	12	11	9	2	4	3	1	6	8	7	5
$(234) = \alpha_{11}$	11	9	10	12	3	1	2	4	7	5	6	8
$(124) = \alpha_{12}$	12	10	9	11	4	2	1	3	8	6	5	7

Teorema 4.7

Untuk $n > 1$, A_n mempunyai orde $n!/2$.

Latihan 4.29

Tentukan elemen α dan β di S_3 sehingga $|\alpha| = 2, |\beta| = 2$, dan $|\alpha\beta| = 3$.

Latihan 4.30

Tunjukkan bahwa suatu permutasi dengan orde ganjil pasti sebuah permutasi genap.

LATIHAN SOAL

1. Misalkan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   Hitunglah: $\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \beta\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta\alpha^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}$.

2. Misalkan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Tuliskan $\alpha, \beta, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$ sebagai hasil dari putaran yang saling lepas dan sebagai hasil dari $2 -$ putaran.

3. Tuliskan setiap permutasi berikut sebagai hasil dari putaran yang saling lepas:
   a. (1235)(413)
   b. (13256)(23)(46512)
   c. (12)(13)(23)(142)
   d. (135)(1246)
   e. (2367)(12463)
   f. (356)(123)(456831)

4. Berapa orde dari setiap permutasi berikut?
   a. (124)(357)
   b. (124)(3567)
   c. (124)(35)
   d. (124)(357869)
   e. (1235)(24567)
   f. (345)(245)

5. Selidiki apakah permutasi berikut merupakan permutasi genap atau ganjil.
   a. (135)
   b. (1356)
   c. (13567)
   d. (12)(134)(152)
   e. (1243)(3521)
   f. (1246)(3456)
6. Tentukan pasangan elemen α, β dan $\alpha\beta$
   a. di S_5 sedemikian sehingga $|\alpha| = 3, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 5.$
   b. di S_6 sedemikian sehingga $|\alpha| = 3, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 5.$
   c. di S_7 sedemikian sehingga $|\alpha| = 3, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 5.$
   d. di S_5 sedemikian sehingga $|\alpha| = 2, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 4.$
   e. di S_6 sedemikian sehingga $|\alpha| = 2, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 4.$
   f. di S_7 sedemikian sehingga $|\alpha| = 2, |\beta| = 3, \text{dan } |\alpha\beta| = 4.$

Daftar Pustaka

Gallian, Joseph A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra* (Ninth Edition). Boston, USA.: Cengage Learning.

Hungerford, Thomas W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Judson, Thomas W. (1993). Abtract Algebra: Theory and Application. [Online]. Tersedia: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=A623CCFB14FFAF159889A8F01A28EA3D [29 Maret 2011]

Terras, Audrey (2019). *Abstract Algebra with Applications*. Cambridge, UK.: Cambridge University Press.