Prodi Pendidikan Matematika
Fakultas Pendidikan Matematika Dan Sains
IKIP Siliwangi

BAB 4
GRUP PERMUTASI

Dr. Rippi Maya, M.Pd.

ILUSTRASI:

Perhatikan suatu himpunan tak kosong A, dengan A himpunan berhingga. Himpunan A dinyatakan dengan $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, untuk beberapa bilangan bulat positif n. Permutasi dari himpunan A tersebut adalah suatu fungsi dari A ke A yang satu-satu dan pada. Sebagai contoh, perhatikan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Untuk semua x elemen A, $f(x) \in A$, permutasi yang mungkin terjadi adalah

1. $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3.$
2. $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2.$
3. $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3.$
4. $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1.$
5. $f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2.$
6. $f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 1.$

Perhatikan bahwa ada $3! = 6$ permutasi yang mungkin terjadi.

Misalkan permutasi yang pertama ditulis dengan α_1. Untuk menyatakan hubungan antara himpunan *A* dan hasil permutasinya adalah dengan menyusunnya dalam bentuk matriks, yaitu $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dengan cara yang sama, permutasi ke dua sampai ke enam juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut ini:

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutasi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ membentuk suatu himpunan tersendiri, yaitu **himpunan permutasi** $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6\}$. Bila himpunan ini bersama-sama dengan operasi komposisi membentuk suatu grup, maka grup ini disebut **grup permutasi**. Berikut ini diberikan definisi dari permutasi suatu himpunan dan grup permutasi dari suatu himpunan.

Definisi 4.1 Permutasi *A*, Permutasi Grup *A*

Permutasi dari suatu himpunan *A* adalah suatu fungsi dari *A* ke *A* yang satu-satu dan pada. **Grup permutasi** dari suatu himpunan *A* adalah suatu himpunan permutasi dari *A* yang membentuk grup terhadap komposisi fungsi.

CONTOH

Perhatikan contoh berikut ini:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$$

Maka

$$\gamma\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & & & \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & & & & \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\gamma\sigma(1) = \gamma\big(\sigma(1)\big) = \gamma(2) = 4$$

Contoh lain:

Misalkan $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Maka $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Latihan 4.1

Misalkan diketahui dua permutasi α dan β, dengan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Dengan operasi komposisi, selidiki apakah $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Latihan 4.2

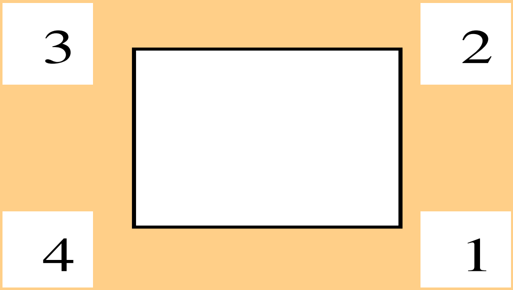
Misalkan S_3 menyatakan himpunan dari semua fungsi satu-satu dari $\{1,2,3\}$ ke dirinya sendiri. S_3 ini membentuk grup dengan 6 elemen (perhatikan kembali Ilustrasi 4.1), terhadap operasi komposisi. Keenam elemen S_3 ini adalah $\{\varepsilon, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$, dengan

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dan $\alpha^2\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Selidiki apakah S_3 grup Abelian.

ILUSTRASI: PERSEGI YANG SIMETRI

Perhatikan grup dihedral D_4. Setiap gerakan dalam D_4 dihubungkan dengan permutasi dari keempat lokasi sudut persegi. Bila keempat sudut persegi tersebut diberi label, maka gambarnya dapat dilihat sebagai berikut:



Rotasi 90^0 (R_{90}) terhadap persegi tersebut berkaitan dengan permutasi $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Sedangkan refleksi terhadap garis horizontal (H) menghasilkan suatu permutasi $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Latihan 4.3

Seperti sudah dijelaskan dalam bab pengantar, elemen dari D_4 adalah $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$. Tuliskan elemen-elemen D_4 tersebut dalam bentuk permutasinya, seperti ρ dan ϕ tersebut di atas.

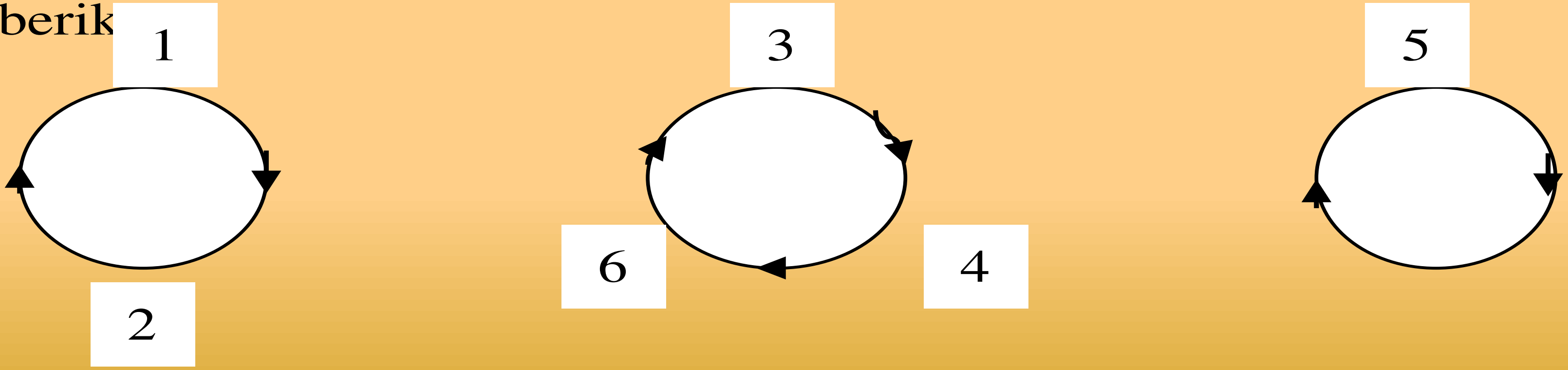
NOTASI PUTARAN (*CYCLE NOTATION*)

ILUSTRASI:

Selain notasi matriks seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, permutasi dapat dinyatakan dalam notasi putaran (*cycle notation*). Perhatikan permutasi berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Penempatan nilai-nilai pada permutasi tersebut dapat dinyatakan secara skematik sebagai berik



KETERANGAN:

- Skema tersebut kemudian diganti dengan notasi putaran sebagai berikut, yaitu $\alpha = (12)(346)(5)$ atau $\alpha = (12)(346)$.
- Perhatikan bahwa menurut kesepakatan, putaran yang hanya mempunyai satu masukan, yaitu (5), dapat dihilangkan. Bila dalam penulisan notasi putaran ada elemen yang hilang (tidak dituliskan), berarti elemen yang hilang tersebut **dipetakan ke dirinya sendiri**.
- Dengan demikian, untuk **permutasi identitas** seperti berikut ini, $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, kita tidak dapat menghilangkan semua elemennya, tetapi hanya menuliskan salah satu elemennya saja, yaitu $\iota = (2)$ atau $\iota = (5)$, atau elemen lainnya.

- Perhatikan permutasi ke dua berikut ini: $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

  Permutasi ini dapat ditulis dalam notasi putaran $\beta = (2315)(64)$ atau $\beta = (46)(3152)$.

- Panjang suatu putaran adalah banyaknya elemen dalam putaran tersebut. Misalkan $\alpha = (12345)$, maka panjang putarannya adalah 5.

SIFAT-SIFAT PERMUTASI

Teorema 4.1 Hasil Putaran yang Saling Lepas (*Disjoint Cycles*)

Setiap permutasi dari suatu himpunan berhingga dapat ditulis sebagai suatu **putaran** (*cycle*) atau sebagai suatu **hasil** (*product*) dari putaran yang saling lepas.

Latihan:

Misalkan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Tuliskan α dan β sebagai hasil dari putaran yang saling lepas.

Teorema 4.2 Komutasi Putaran yang Saling Lepas

Jika sepasang putaran $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m)$ dan $\beta = (b_1, b_2, ..., b_n)$ tidak mempunyai elemen-elemen (*entry*) yang sama, maka $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Latihan:

Misalkan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Selidiki apakah $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Teorema 4.3 Orde dari Permutasi

Orde suatu permutasi dari suatu himpunan berhingga, yang ditulis dalam bentuk putaran yang saling lepas, adalah **kelipatan persekutuan terkecil** (KPK) dari panjang putaran.

Contoh:

$|(132)(45)| = \text{KPK}(3,2) = 6$

$|(1432)(56)| = \text{KPK}(4,2) = 4$

$|(123)(456)(78)| = \text{KPK}(3,3,2) = 6$

$|(123)(145)| = |(14523)| = 5.$

Keterangan:

$$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$(145) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(123)(145) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (14523)$$

Latihan 4.11

Tentukan orde dari permutasi $\alpha = (12)(3)(45)$ dan $\beta = (153)(24)$.

Latihan 4.12

Perhatikan permutasi $\gamma = (13)(27)(456)(8)(1237)(648)(5)$. Apakah permutasi γ terdiri dari putaran yang saling lepas? Dapatkah kita menghitung orde permutasi γ dengan menggunakan Teorema 4.3? Jelaskan pendapatmu.

Latihan 4.13

Perhatikan soal Latihan 4.12. Dapatkah permutasi γ dinyatakan dalam bentuk putaran yang saling lepas? Bila ya, tentukan orde dari permutasi γ tersebut.

Jawaban Latihan 4.13:

- $\gamma = (13)(27)(456)(8)(1237)(648)(5) =$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 3 & 7 & 1 & 5 & 6 & 4 & 2 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 7 & 8 & 5 & 4 & 1 & 6\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 7 & 1 & 2 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix} = (1732)(48)(56).$$

- Jadi $|\gamma| = |(1732)(48)(56)| = KPK(4,2,2) = 4.$

DAFTAR PUSTAKA

Gallian, Joseph A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra* (Ninth Edition). Boston, USA.: Cengage Learning.

Hungerford, Thomas W. (1974). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.

Judson, Thomas W. (1993). Abtract Algebra: Theory and Application. [Online]. Tersedia: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=A623CCFB14FFAF159889A8F01A28EA3D [29 Maret 2011]

Terras, Audrey (2019). *Abstract Algebra with Applications*. Cambridge, UK.: Cambridge University Press.