Materi Geometri Eucides A1 ’20. 20-2 (P. 1-4)

GEOMETRI

EUCLIDES BIDANG

Geometri Euclides pada bidang, selanjutnya kiita sebut sebagai geometri Euclides. Adalah geometri yang secara khusus bekerja hanya pada bidang.

Titik Garis Segmen Garis dan sinar

Suatu bidang yang padanya diberlakukan geometri Euclides adalah sebuah himpunan yang unsur-unsur tak terdefinisikannya dinamakan titik. Inilah bidang Euclides, apabila pada himpunan titik-titik ini kita berlakukan suatu struktur geometri yang terbagi atas unsur-unsur tak terdefinisi macam-macam aksioma definisi-definisi dan teorema-teorema.

Unsur-unsur tak terdefinisi adalah titik dan himpunan-himpunan bagian bidang yang dinamakan garis.

- Sistem aksioma insidensi

- Sebuah garis kumpulan titik titik yang tak kosong dan mengandung sedikitnya 2 titik
- Kalau ada dua titik, maka ada tepat sebuah garis yang memuat dua titik tersebut
- Ada tiga titik yang tak semua terletak pada satu garis

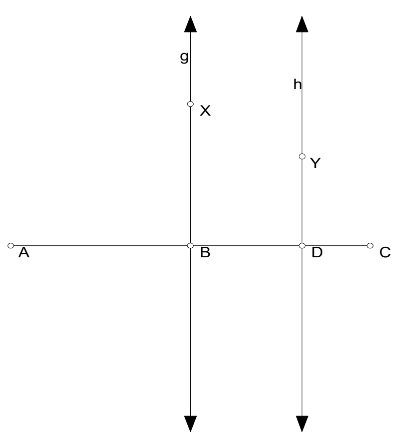
- Sistem aksioma urutan, yang mengatur konsep urutan tiga titik pada sebuah garis, konsep setengah garis
  (sinar), dan konsep ruas garis.
- Sistem aksioma kekonggruenan, yang mengatur kekongruenan dua ruas garis, kekongruenan dua segitiga, cst.
- Aksioma kekontiniuan (aksioma archimedes) yang mengatakan bahwa apabila $a,b \in R^+$ dengan $a < b$ maka ada bilangan asli n sehingga $na > b$.
- Aksioma kesejajaran Euclides yang menyatakan bahwa apabila ada dua garis a dan b yang // dan dipotong garis ketiga c dititik $A \in a$ dan titik $B \in b$ sehingga jumlah besarnya dua sudut dalam sepihak di A dan B kurang dari 180^0, maka a dan b akan berpotongan pada bagian bidang yang terbagi oleh garis c yang memuat kedua sudut dalam sepihak itu

<u>Catatan</u> :

Setelah lebih 2000 tahun, sifat yang setara dengan aksioma kesejajaran Euclides adalah aksioma Playfair (abad XIX). Aksioma ini adalah sebagai berikut; adaikan ada garis g dan sebuah titik $P \in g$. maka ada tepat satu garis h melalui P yang sejajar dengan garis g.

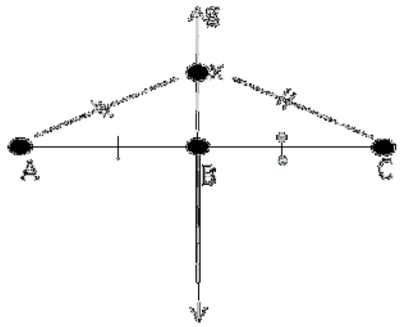
Dengan adanya aksioma ini, apabila aksioma Euclides dianggap sebagai aksioma, berarti sifat Playfair dapat dibuktikan dan apabila aksioma Playfair dianggap sebagai aksioma, maka sifat yang terkandung dalam aksioma Euclides dapat dibuktikan. Apabila sebuah geometri hanya memenuhi aksioma pertama hingga keempat, geometri tsb dinamakan geometri netral (geomteri absolut). Apabila dalam geometri netral juga memberlakukan akisoma yang mengatakan bahwa melalui sebuah titik P diluar sebuah garis g ada lebih dari satu garis yang sejajar g, maka geometri ini dinamakan geometri Lobachevsky (Rusia abad XVIII). Ini adalah salah satu contoh geometri non Euclides, yaitu geometri yang tidak menganut aksioma kesejajaran Euclides.

Dalam sebuah geometri yang menganut semua sistem aksioma di atas dapat dibuktikan bahwa jumlah besarnya sudut-sudut dalam setiap segi tiga adalah sama dengan besarnya sudut lurus. Dan apabila tanpa aksioma terakhir ditambah aksioma kesejajaran Lobachevsky jumlah itu kurang dari sudut lurus. Selanjutnya dalam geometri netral jumlah tersebut adalah kurang atau sama dengan besarnya sudut lurus.



andai $\overline{AC}$ sebuah ruas garis dan B titik tengah ruas garis itu. Andai g sebuah garis yang melalui B dan yang tegak lurus pada $\overline{AC}$. Apabila sebuah titik X ∈ g maka XA = XC (XA artinya panjang ruas garis AX), sehingga XA adalah sebuah bilangan real positif yang disebut jarak antara titik A dan titik X, dan apabila X=A berarti jarak ini sama dengan nol.

Membuktikan bahwa benar XA = XC; kita tarik ruas garis XA dan ruas garis XC (perhatikan sketsanya di bawah).



Perhatikan Δ ABX dan Δ CBX.

Maka berlakulah BA = BC, sebab B titik tengah $\overline{AC}$

BX = BX

Besar ∠ ABX = besar ∠ CBX, sebab B ⊥ $\overline{AC}$

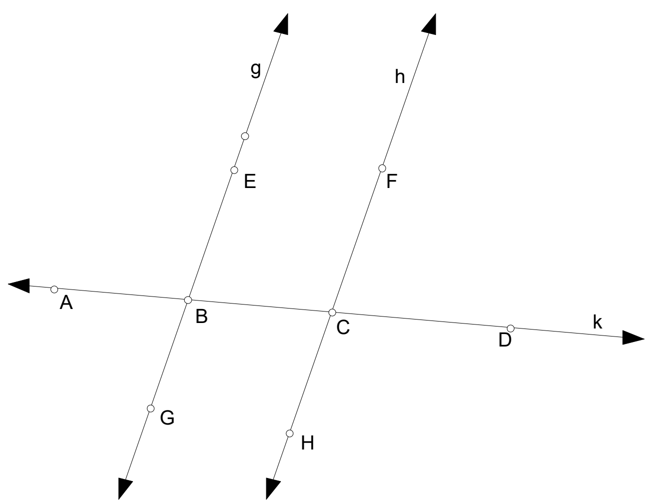
Dengan demikian maka Δ ABX ≅ Δ CBX berdasar sifat kekongruenan dua segi tiga aturan S - Sd - S (sisi -sudut -sisi).

Tugas Mahasiswa 1

Lakukan kajian atas sifat kekongruenan yang lain ex; Sd-S-Sd.

Sepasang Garis yang Sejajar

Perhatikan sketsa di bawah berikut.



Garis g // garis h, yang kemudian dipotong garis k di titik B dan titik C.

Berdasar aksioma kesejajaran Euclides dapat simpulan berikut;

- m (∠ABE) = m(∠BCF), karena sehadap. (m (∠ABE) = besar dari sudut ABE)
- m (∠ABE)=m(∠BGC), karena bertolak belakang
- m(∠ABE)=m(∠HCD), karena luar bersebrangan

- m($\angle$CBE)=m($\angle$BCH), karena dalam bersebrangan

Tugas Mahasiswa 2

Buat permasalah sejalan konsep sepasang garis yang // dan selesaikan.

Soal latihan 1

1. buktikan bahwa hanya ada satu garis a melalui sebuah titik pada sebuah garis b, sehingga $a \perp b$.
2. Diketahui tiga titik A, B, dan C yang tak segaris. Lukis lingkaran yang melalui tiga titik ini.

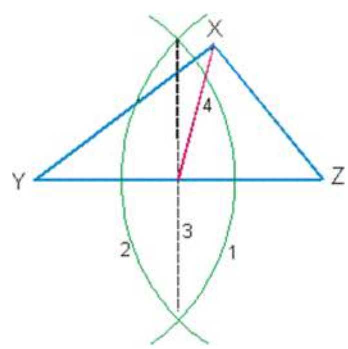
Garis – garis istimewa dalam segitiga

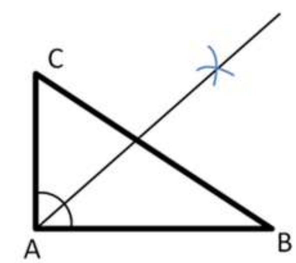
Terlebih dahulu dengan menggunakan jangka n dua pengaris segitiga kita melukis garis:

- Garis sumbu Garis tinggi
- Garis bagi Garis berat

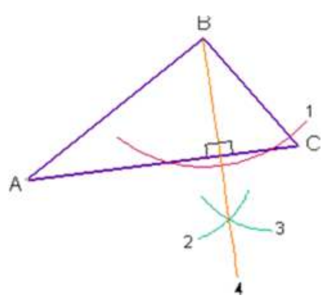
Dalam sebuah segi tiga diketahui ada macam-macam garis yang istimewa, yaitu garis bagi sudut, garis berat, dan garis tinggi.

Perhatikan gambar (a) (b) (c) di bawah





(b)



(c)

Tugas Mahasiswa 3

1. Temukan garis berat bagi dan tinggi sesuai kondisi yang nampak pada sketsa di atas. Jelaskan.
2. Kaji literatur tentang lingkaran (kelompok, kumpul saat UTS)

Garis bagi adalah garis yang ditarik dari salah satu sudut pada segitiga sehingga membagi sudut tersebut menjadi dua sama besar

Garis berat suatu segitiga adalah garis yang ditarik dari titik sudut suatu segitiga sehingga membagi sisi didepannya menjadi dua bagian sama panjang

Garis tinggi segitiga adalah garis yang melalui salah satu sudut segitiga dan tegak lurus dengan sisi didepannya

Dapat dibuktikan bahwa :

- Ketiga garis bagi dalam setiap segitiga melalui satu titik
- Ketiga garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik
- Ketiga garis tinggi dalam setiap segitiga melalui satu titik

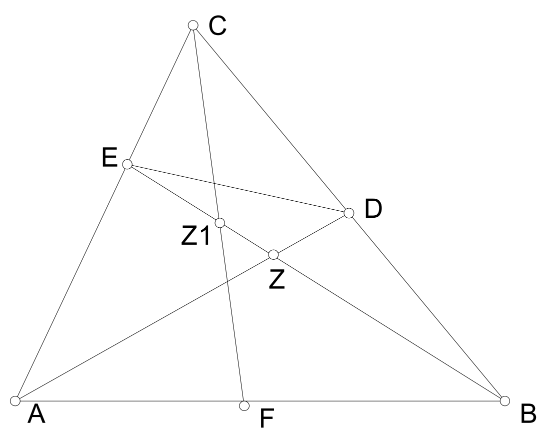
Bukti. (untuk titik pertama ingat konsep jarak titik dg garis)

- Apabila $\overleftrightarrow{AD}$ garis bagi dari $\angle$ BAC , maka setiap titik pada $\overleftrightarrow{AD}$ letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$.

(titik tersebut letaknya sama jauhnya dari $\overleftrightarrow{BA}$ dari $\overleftrightarrow{BC}$).

Andaikan $\overleftrightarrow{BH}$ dan $\overleftrightarrow{AD}$ berpotongan disebuah X, maka X ini letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$ (karena X anggota $\overleftrightarrow{AD}$) , pula X letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{BA}$ dan $\overleftrightarrow{BC}$ (karena X $\in$ $\overleftrightarrow{BH}$). Jelas X letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{CA}$ dan $\overleftrightarrow{CB}$. Ini berarti bahwa X terletak pada garis bagi dari $\angle ACB$, yang berarti pula bahwa $\overleftrightarrow{CX}$ adalah garis bagi $\angle ACB$. (SS)

- Andai $\overleftrightarrow{AD}$ garis berat yang melalui titik sudut A maka CD = DB, andai $\overleftrightarrow{BE}$ garis berat yang melalui titik sudut B maka AE = EC. Andai $\overleftrightarrow{AD}$ dan $\overleftrightarrow{BE}$ berpotongan di Z, yang harus dibuktikan bahwa garis berat yang melalui C juga akan melalui Z (perhatikan gambar)



Saudara ketahui bahwa $\Delta CED \approx \Delta CAB$, ini karena ΔECD dan ΔACB memiliki $\angle C$ bersama sedangkan sisi-sisi sudut itu sebanding. Artinya CE : CA = CD : CB = 1:2. Dengan demikian maka $\overleftrightarrow{ED}$ // $\overleftrightarrow{AB}$ dan ED : AB = CE : CA = 1 : 2

Juga m($\angle$DEZ)=m($\angle$ABZ) dan m($\angle$EZD)=m($\angle$AZB)... <u>alasan Masasiswa diskusikan dalam perkuliahan</u>... . jadi $\Delta EZD \approx \Delta AZB$, sehingga EZ : ZB = ED : AB = 1: 2 = DZ : AZ.

Andaikan $\overleftrightarrow{CF}$ garis berat yang melalui C dan memotong $\overleftrightarrow{EB}$ di Z1 maka dengan cara yang serupa saudara dapat membuktikan bahwa $EZ_1 : Z_1B = 1 : 2$. Jadi kita peroleh EZ = $\frac{1}{3}$ EB dan juga EZ_1 = $\frac{1}{3}EB$.

Sehingga $Z_1 = Z$.

Ini berarti bahwa garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik.

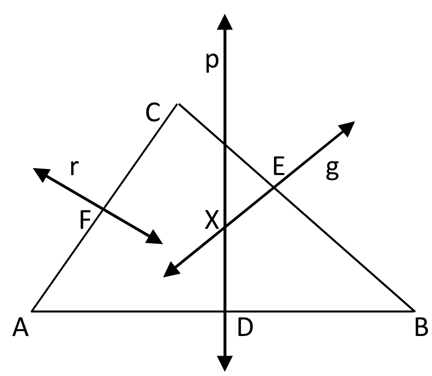
- Membuktikan ketiga garis tinggi dalam setiap segitiga melalui satu titik.

Kita gunakan sifat bahwa <u>sumbu-sumbu sisi- sisi setiap segitiga</u> melalui satu titik

(ini kita buktikan terlebih dahulu).

Perhatikan gambar di bawah.

Saudara lihat segitiga ABC; garis p adalah sumbu $\overleftrightarrow{AB}$ yang memotongnya di D. gari g adalah sumbu $\overleftrightarrow{BC}$ yang memotongnya di E, dan r adalah sumbu $\overleftrightarrow{CA}$ yang memotongnya di F.



Andaikan p dan g berpotongan di X. kita akan membuktikan bahwa r akan melalui X.

Ingat konsep sebelumnya bahwa XA = XB sebab X terletak pada sumbu $\overline{AB}$. Begitu pula XB = XC sebab X terletak pada sumbu $\overline{BC}$.

Jadi XA = XC yang berarti X terletak pada sumbu $\overline{AC}$. Dengan kata lain perkataan sumbu-sumbu p, g, r melalui satu titik yaitu titik X.

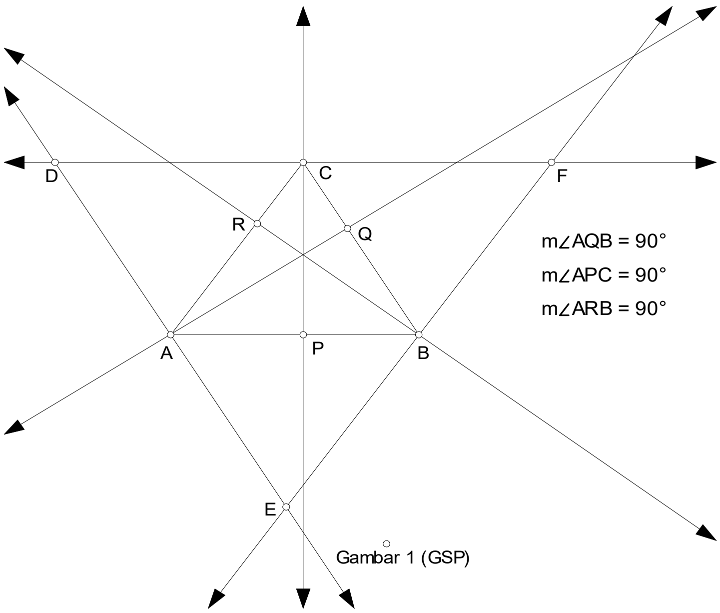
<u>Catatan</u>:

X merupakan pusat lingkaran luar segi tiga ABC. Yaitu lingkaran yang melalui titik-titik A, B, dan C.

Tugas Mahasiswa 4.

Menunjukan kebenaran pernyataan dalam catatan di atas dengan melukisnya menggunakan jangka dan penggaris.

Perhatikan gambar 1 (GSP)



Gambar 1 (GSP)

Pada segitiga ABC pada gambar 1 (GSP) di atas. Dari titik A, B, dan C dibuat garis-garis yang masing-masing sejajar dengan sisi hadapnya sudut itu.

Apabila garis-garis itu berpotongan di D, E, dan F maka

$$\overline{DE} \,//\, \overline{CB};\ \overline{EF} \,//\, \overline{AC};\ \overline{DF} \,//\, \overline{AB}.$$

Perhatikan segi-4 ABFC, maka ia adalah suatu jajar genjang sebab $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CF}$. Sehingga AB = CF; begitu pula ABCD adalah jajar genjang. Jadi AB = DC. Maka DC = CF, yang berarti bahwa C titik tengah $\overline{DF}$; demikian pula B titik tengah $\overline{EF}$ dan A titik tengah $\overline{DE}$. Bila $\overleftrightarrow{AQ}$ dan $\overleftrightarrow{BR}$ garis-garis tinggi ΔABC yang melalui A dan B, maka garis-garis tinggi ini adalah sumbu-sumbu dari sisi $\overline{DE}$ dan $\overline{EF}$ dalam ΔDEF. Begitu pula $\overline{CP}$ adalah sumbu sisi $\overline{DF}$. Karena sumbu-sumbu dalam ΔDEF melalui satu titik maka garis-garis tinggi $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$, dan $\overleftrightarrow{CP}$ melalui satu titik pula

Soal latihan 2

1. Diketahui segi-tiga ABC, segmen garis AD adalah garis bagi sudut BAC. Mengapa titik pada garis AD letaknya sama jauh dari garis AC dan dari garis AB. Tunjukan.

2. Andai ada segi-tiga ABC. Andaikan garis AD adalah garis bagi dari sudut BAC. Andaikan garis BE adalah garis bagi dari sudut luar CBF dan garis CH adalah garis bagi dari sudut luar GCB. Maka ketiga garis bagi itu akan berpotongan pada satu titik.

   Tugas kita: membuat sketsa sesuai pernyataan di atas. Lalu membuktikannya.

Rujukan

Referensi Materi Geo Euclides Prodi Math IKIP Siliwangi Cimahi (marchasan. 2019)