Materi PEMROGRAMAN LINIER (Pert. 1 – 4. 20-2)

9.1 Definisi Pemrograman Linier

Pemrograman linier (PL) adalah metode optimasi untuk menentukan nilai optimum dari fungsi tujuan linier pada kondisi pembatasan-pembatasan (constraints) tertentu.
Pembatasan-pembatasan tersebut biasanya keterbatasan yang berkaitan dengan sumber daya seperti :

a. Bahan mentah
b. Uang
c. Waktu
d. Tenaga kerja dll.

Persoalan pemrograman linier dapat ditemukan pada berbagai bidang dan dapat digunakan untuk membantu membuat keputusan untuk memilih suatu alternatif yang paling tepat dan pemecahan yang paling baik (the best solution).
Aplikasi pemrograman linier misalnya untuk keperluan :

a. Realokasi sumber daya
b. Produksi campuran,
c. Penjadwalan,
d. Keputusan investasi,
e. Perencanaan produksi,
f. Masalah transportasi, logistic, dll.

9.1.1 Elemen Pemrograman Linier

Ada tiga elemen penting dalam pemrograman linier yaitu :

a. Variabel keputusan (**decision variables**) : $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variable yang nilai-nilainya dipilih untuk dibuat keputusan.
b. Fungsi tujuan (**objective function**): $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ adalah fungsi yang akan dioptimasi (dimaksimumkan atau diminimumkan).
c. Pembatasan (**constraints**): $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_1$ adalah pembatasan-pembatasan yang harus dipenuhi.

9.1.2 Pola Umum Pemrograman Linier

Menentukan variabel keputusan (decision variables) yaitu : $x_1, x_2, \dots, x_n$ sedemikian rupa untuk mengoptimalkan fungsi tujuan (objective function) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi pembatasan-pembatasan (constraints) $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_1$ $(i = 1, 2, \dots, m)$.
Variabel keputusan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan nilai non-negatif atau $x_1 \ge 0$ untuk semua j= 1,2, .. , n.

a. Nilai variabel keputusan $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memenuhi semua pembatasan-pembatasan model disebut solusi layak (feasible).
b. Nilai variabel keputusan $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang memberikan nilai fungsi tujuan optimum (maksimum atau minimum) dan memenuhi pembatasan-pembatasan disebut *solusi optimum*.

9.1.3 Asumsi Pemrograman Linier

Penggunan pemrograman linier untuk mendekati dan merepresentasikan situasi kehidupan nyata menggunakan beberapa asumsi yaitu :

1. *Proporsionalitas*. Kontribusi masing-masing variabel keputusan terhadap fungsi tujuan dan pembatasan-pembatasan adalah proporsional langsung terhadap nilai variabel keputusan.
2. *Aditivitas*. Kontribusi terhadap fungsi tujuan dan pembatasan-pembatasan untuk beberapa variabel adalah independen (bebas) dari variabel keputusan yang lain sehingga kontribusi masing-masing variabel keputusan dapat digabungkan/ditambahkan menjadi kontribusi total.
3. *Divisibilitas*. Variabel keputusan adalah kontinu sehingga dapat diambil nilai fraksionalnya.
4. *Deterministik*. Semua parameter (fungsi tujuan, pembatasan-pembatasan, seluruh koefisien) diketahui dengan pasti dan tetap tidak berubah selama dilakukan kajian atau analisis.

9.2 Model Pemrograman Linier

Ada dua model pemrograman linier yaitu model pemrograman linier persoalan maksimum (maksimasi) dan model pemrograman linier persoalan minimum (minimasi).

9.2.1 Model Pemrograman Linier Maksimum

Mencari variabel keputusan nonnegative (x_i) yang memenuhi fungsi tujuan maksimum.

a. Tentukan variabel keputusan:
   $x_1, x_2, \dots, x_n$
b. Sedemikian rupa sehingga (S.r.s) :
   $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$: Fungsi tujuan maksimum
c. Dengan pembatasan-pembatasan (D.p) :
   $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$
   $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$
   … … … … … … … … … …
   $a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$

   Di mana $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

9.2.2 Model Pemrograman Linier Minimum

Mencari variabel keputusan nonnegative (x_i) yang memenuhi fungsi tujuan minimum.

a. Tentukan variabel keputusan :
   $x_1, x_2, \dots, x_n$
b. Sedemikian rupa sehingga (S.r.s):
   $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$: Fungsi tujuan minimum
c. Dengan pembatasan-pembatasan (D.p) :
   $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1$
   $a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2$
   … … … … … … … … … …
   $a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m$

   Di mana $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

9.3 Persoalan Pemrograman Linier

Persoalan pemrograman linier adalah persoalan optimasi yang memenuhi ketentuan berikut :

1. Fungsi tujuan merupakan fungsi linier dari variabel keputusan.
2. Nilai variabel keputusan harus memenuhi pembatasan-pembatasan.
   Setiap pembatasan harus berbentuk persamaan atau ketidaksamaan linier.
3. Setiap variabel keputusan harus dibatasi yaitu nonnegatif.

Syarat dari Persoalan Pemrograman Linier

Ada beberapa persyaratan penting dalam merumuskan persoalan pemrograman linier yaitu :

1. Ada beberapa kuantitas yang memungkinkan dioptimasi untuk digunakan sebagai tujuan.
2. Ada variabel-variabel yang dapat dibuat variabel keputusan.
3. Ada pembatasan kemampuan dalam mencapai tujuan.
4. Ada langkah-langkah alternatif pemecahan yang dapat dipilih.
5. Tujuan dan pembatasan-pembatasan harus dapat diekspresikan dalam persamaan atau ketidaksamaan linier.

Tahapan Memformulasikan Persoalan Pemrograman Linier

Ada beberapa tahapan dalam memformulasikan persoalan pemrograman linier yaitu :

1. Memahami persoalan secara keseluruhan apakah persoalan tersebut adalah persoalan maksimum atau minimum.
2. Mengidentifikasi variabel keputusan.
3. Mendeskripsikan fungsi tujuan sebagai kombinasi linier dari variabel keputusan.
4. Mendeskripsikan pembatasan-pembatasan sebagai kombinasi linier dari varibel keputusan.

5. Mengidentifikasi batas bawah atau batas atas variabel keputusan.
6. Mengekspresikan semua hasil identifikasi tersebut dalam formula matematika.

Contoh :

1. Formulasikan persoalan pemrograman linier berikut.
   Suatu perusahaan makanan akan memproduksi dua jenis makanan yaitu brownie kukus dan eskrim cokelat. Satu satuan brownie kukus diperlukan bahan 4 ons coklat dan 2 ons gula. Sedangkan satu satuan eskrim coklat diperlukan bahan 2 ons coklat dan 2 ons gula. Perusahaan tersebut mempunyai dua buah bahan mentah yaitu coklat murni dan gula yaitu masing-masing 60 kg dan 48 kg. harga satuan brownie kukus Rp 40 ribu dan eskrim coklat Rp 20 ribu. Berapa banyak brownie kukus dan eskrim coklat yang harus diproduksi supaya hasil penjualan yang maksimum dengan memanfaatkan semua bahan mentah tersebut.

Solusi :

1. Persoalan pemrograman tersebut adalah persoalan maksimum.

2. Variabel keputusan :
   x_1 = brownie kukus
   x_2 = eskrim coklat

3. Fungsi tujuan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
   $Z = 40x_1 + 20x_2$ (maksimum)

4. Pembatasan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
   $4x_1 + 2x_2 \leq 60$ (coklat)
   $2x_1 + 2x_2 \leq 48$ (gula)

5. Batas bawah dan atas variabel keputusan :
   $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$

6. Formulasi matematika persoalan pemrograman tersebut :
   Cari x_1 dan x_2
   S.r.s : $z = 40x_1 + 20x_2$ (maksimum)
   D.p : $4x_1 + 2x_2 \leq 60$
   $2x_1 + 2x_2 \leq 48$
   $x_1, x_2 \geq 0$

2. Formulasikan persoalan pemrograman linier berikut.
   Suatu perusahaan garmen akan memproduksi dua jenis pakaian yaitu baju dan celana panjang. Proses produksi meliputi memotong, menjahit, dan packaging. Perusahaan tersebut mempekerjakan 25 orang pada bagian memotong, 40 orang pada bagian menjahit, dan 5 orang pada bagian packaging. Semua tenaga kerja tersebut bekerja 8 jam per hari selama 5 hari kerja dalam seminggu.
   Tabel berikut menunjukkan waktu yang diperlukan dan keuntungan (profit) per satuan untuk pakaian tersebut.

Table 1. Waktu yang diperlukan dan keuntungan per satuan pakaian

Pakaian	Memotong	Menjahit	Packaging	Profit (Rp)
Baju	1	2	0.3	80
Celana Panjang	2	2	0.1	120

Berapa produksi pakaian optimum mingguan pada perusahaan tersebut.

Solusi :

1. Persoalan pemrograman tersebut adalah persoalan maksimum.

2. Variabel keputusan :
   x_1 = baju
   x_2 = celana panjang

3. Fungsi tujuan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
   $Z = 80x_1 + 120x_2$ (maksimum)

4. Pembatasan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
   $X_1 + 2x_2 \leq 25x8x5$ (memotong)
   $2x_1 + 2x_2 \leq 40x8x5$ (menjahit)
   $0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 5x8x5$ (packaging)

5. Batas bawah dan atas variabel keputusan :
   $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$

6. Formulasi matematika persoalan pemrograman tersebut adalah :
   Cari x_1 dan x_2
   S.r.s : $z = 80x_1 + 120x_2$ (maksimum)
   D.p : $x_1 + 2x_2 \leq 1000$
   $2x_1 + 2x_2 \leq 1600$
   $0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 200$
   $x_1, x_2 \geq 0$

3. Formulasikan persoalan pemrograman linier berikut.
   Suatu perusahaan mobil akan memasang iklan di media cetak dan televise. Perusahaan tersebut bertujuan memilih cara beriklan yang paling efektif sehingga biayanya minimum dan sasaran iklan mencapai lebih dari 40 juta orang yang di antaranya 25 juta orang berpendapatan lebih dari Rp 5 juta/bulan. Biaya memasang iklan di media cetak sebesar Rp 2 M dan di televise sebesar Rp 8 M. Pembaca media cetak sebanyak 4 juta orang dan penonton televisi sebanyak 10 juta orang. Di antara pembaca media cetak terdapat 2 juta orang berpendapatan lebih dari Rp 5 juta/bulan dan di antara penonton televisi terdapat 1 juta orang berpendapatan lebih dari Rp 5 juta/bulan.

   Solusi :
   1. Persoalan pemrograman tersebut adalah persoalan minimum
   2. Variabel keputusan :
      X_1 = media cetak
      X_2 = televise

   3. Fungsi tujuan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
      $Z = 2x_1 + 8x_2$ (minimum)

   4. Pembatasan sebagai kombinasi linier variabel keputusan :
      $4x_1 + 10x_2 \geq 40$ (pembaca media cetak dan penonton televisi)
      $2x_1 + x_2 \geq 25$ (pendapatan lebih dari Rp 5 juta/bulan)

   5. Batas bawah dan atas variabel keputusan :
      $x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$

   6. Formulasi matematika persoalan pemrograman tersebut :
      Cari x_1 dan x_2
      S.r.s : $z = 2x_1 + 8x_2$ (minimum)

D.p. : $4x_1 + 10x_2 \geq 40$

$2x_1 + x_2 \geq 25$

$X_1, x_2 \geq 0$

9.4 Solusi Persoalan Pemrograman Linier

Solusi persoalan pemrograman linier didasarkan pada identifikasi variabel keputusan (decision variables) yaitu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tujuan (objective function) yaitu $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dan pembatasan-pembatasan (constraints) yaitu $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i$ (i =1,2, … , m) .

Variabel keputusan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan nilai non negatif atau $x_j \geq 0$ untuk semua j = 1,2, … , n. Nilai variabel keputusan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memenuhu semua pembatasan-pembatasan model disebut solusi layak (feasible). Nilai variabel keputusan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang memberikan nilai fungsi tujuan optimum (maksimum atau minimum) dan memenuhi pembatasan-pembatasan disebut solusi optimum.

Setelah persoalan pemrograman linier (PL) dapat diidentifikasi variabel keputusan, fungsi tujuan, dan pembatasannya yang diformulasikan ke dalam bentuk matematik, maka persoalan pemrograman linier tersebut dapat dipecahkan menggunakan beberapa metode seperti metode grafik, metode subtitusi, dan metode simplex.

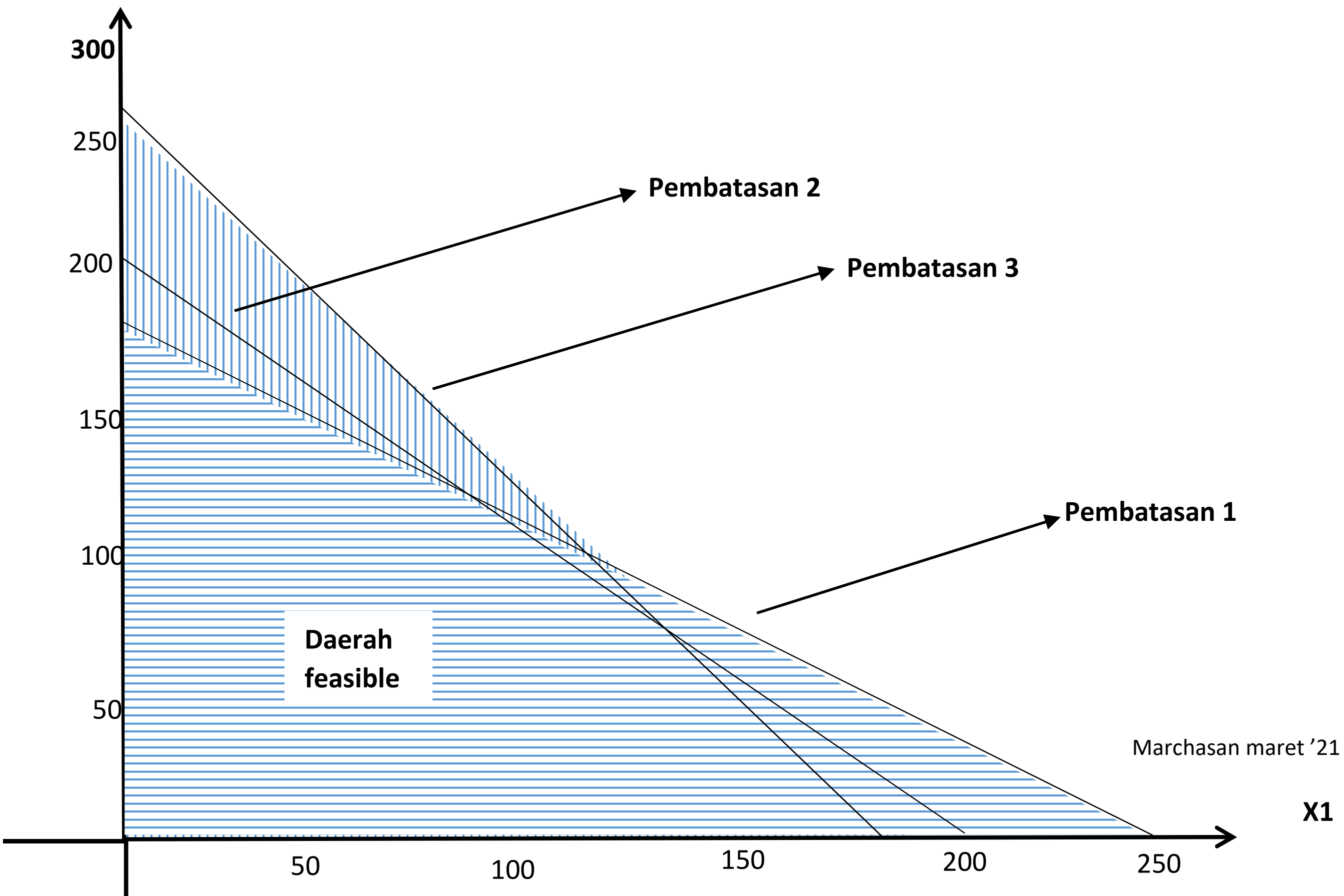
9.5 Metode Grafik

Metode grafik dipergunakan untuk menyelesaikan pemrograman linier yang mempunyai dua (atau kadang-kadang 3) variabel keputusan. Pemecahan pemrograman linier menggunakan metode grafik terdiri dari dua fase yaitu :

1. Menentukan ruang/ daerah penyelesaian (solusi) yang feasible yaitu menemukan nilai variabel keputusan di mana semua pembatasan bertemu.
2. Menemukan solusi optimal dari semua titik di ruang/daerah feasible.

A. Tahapan Menentukan Ruang/Daerah Feasible

1. Gambarlah sumbu vertical dan sumbu horizontal (sumbu 2 dimensi) yang mewakili nilai variabel keputusan.
2. Semua variabel keputusan adalah non-negatif menunjukan bahwa daerah feasible hanya berada pada kuadran pertama.
3. Gambarlah semua pembatasan sebagai garis (setiap ketidaksamaan pembatasan diubah menjadi persamaan). Untuk menggambar garis tersebut gunakan (x_1, o) dan (o , x_2) .
4. Pada setiap ketidaksamaan pembatasan, tentukan daerah feasible-nya.
5. Tentukan interseksi dari semua daerah feasible yang didefinisikan semua pembatasan. Langkah ini akan menghasilkan daerah feasible.



Contoh :

1. Tentukan solusi dari persoalan pemrograman linier berikut.

   Cari x_1 dan x_2

   S.r.s : $Z = 350\ x_1 + 300\ x_2$ (maksimum)

   D.p : $x_1 + x_2 \leq 200$

   $9\ x_1 + 6\ x_2 \leq 1566$

   $12\ x_1 + 16\ x_2 \leq 2880$

   $, x_2 \geq 0$

Solusi :

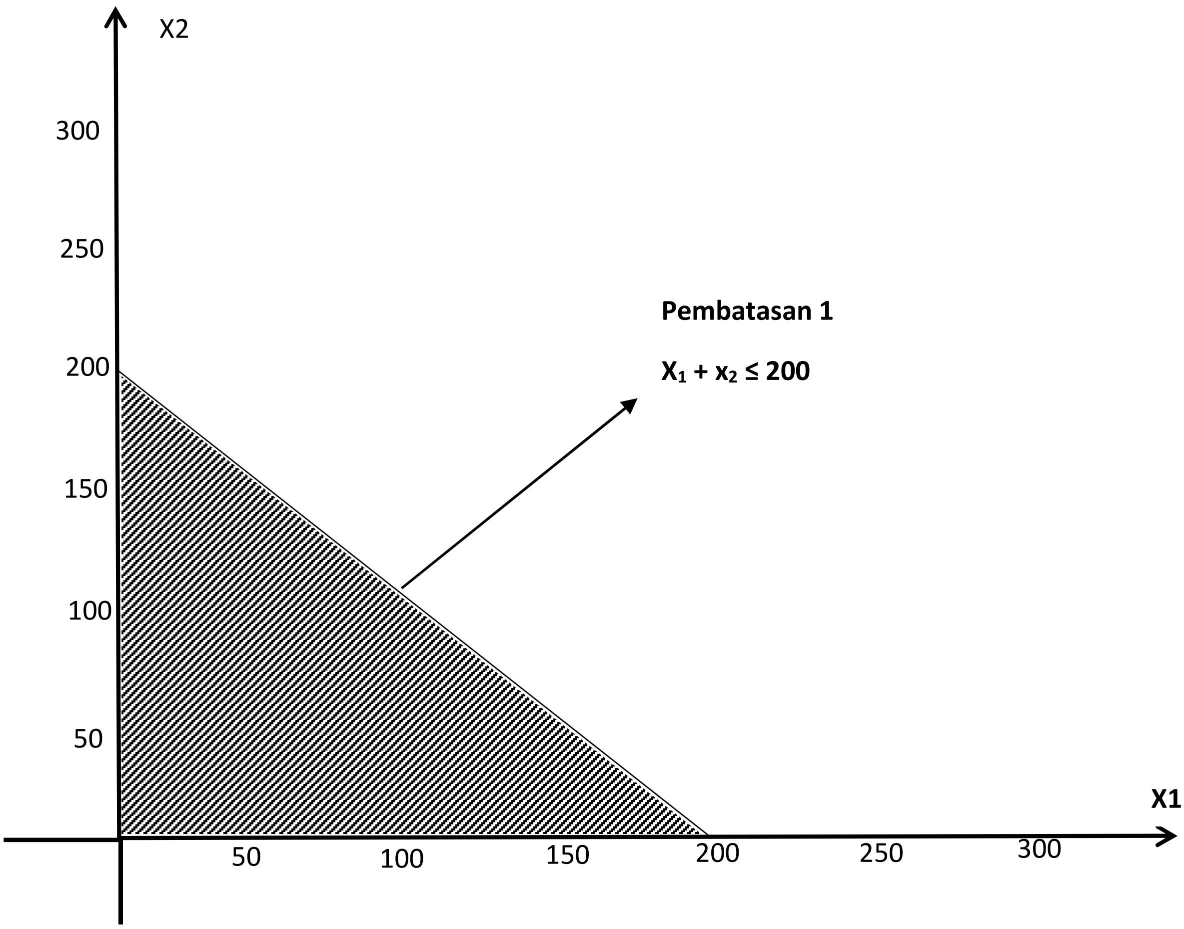
Gambarlah semua garis pembatasan pada bidang datar (sumbu vertikal dan horizontal) untuk menentukan daerah feasible .

$X_1 + x_2 \leq 200$ ⇒ $x_1 + x_2 = 200$

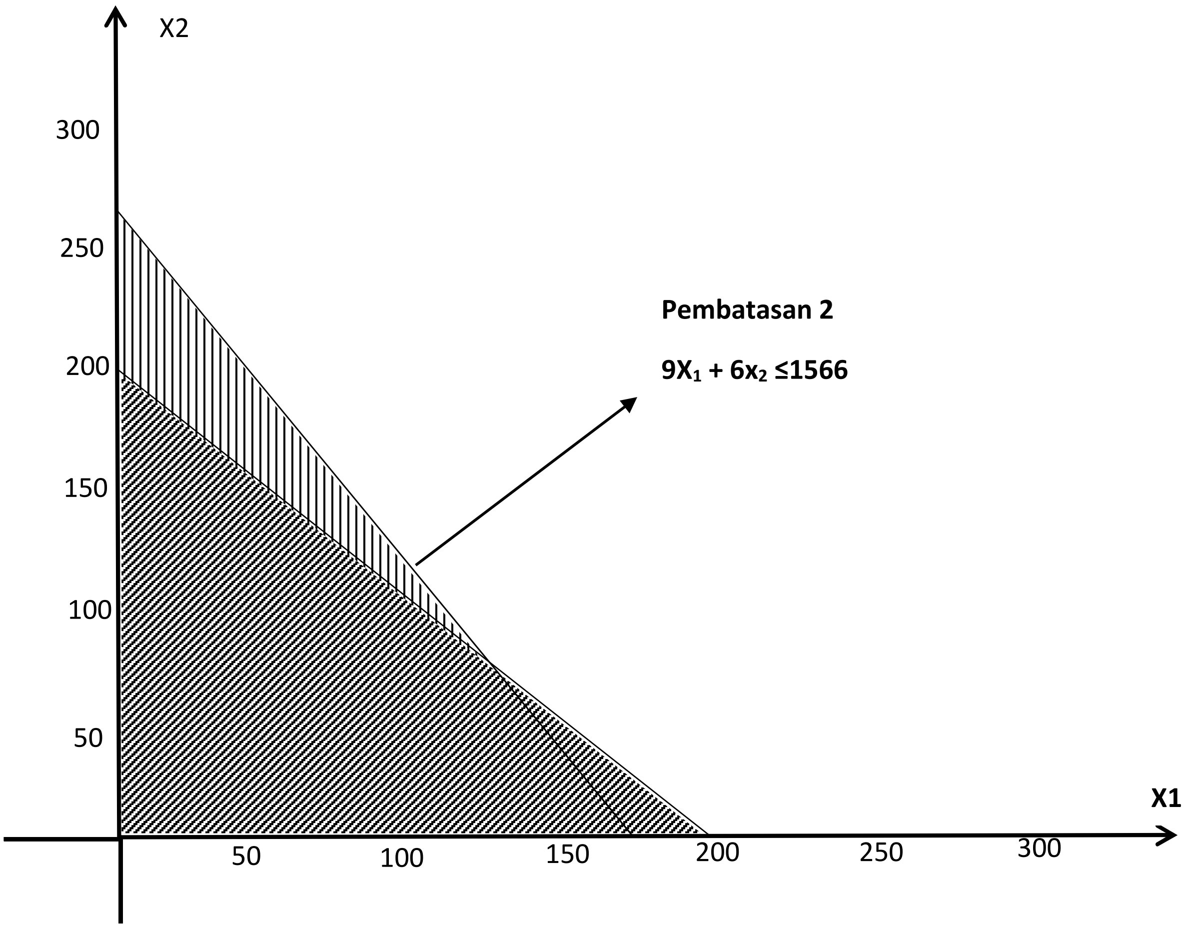
$9\ x_1 + 6\ x_2 \leq 1566$ ⇒ $9\ x_1 + 6\ x_2 = 1566$

$12\ x_1 + 16\ x_2 \leq 2880$ ⇒ $12\ x_1 + 16\ x_2 = 2880$

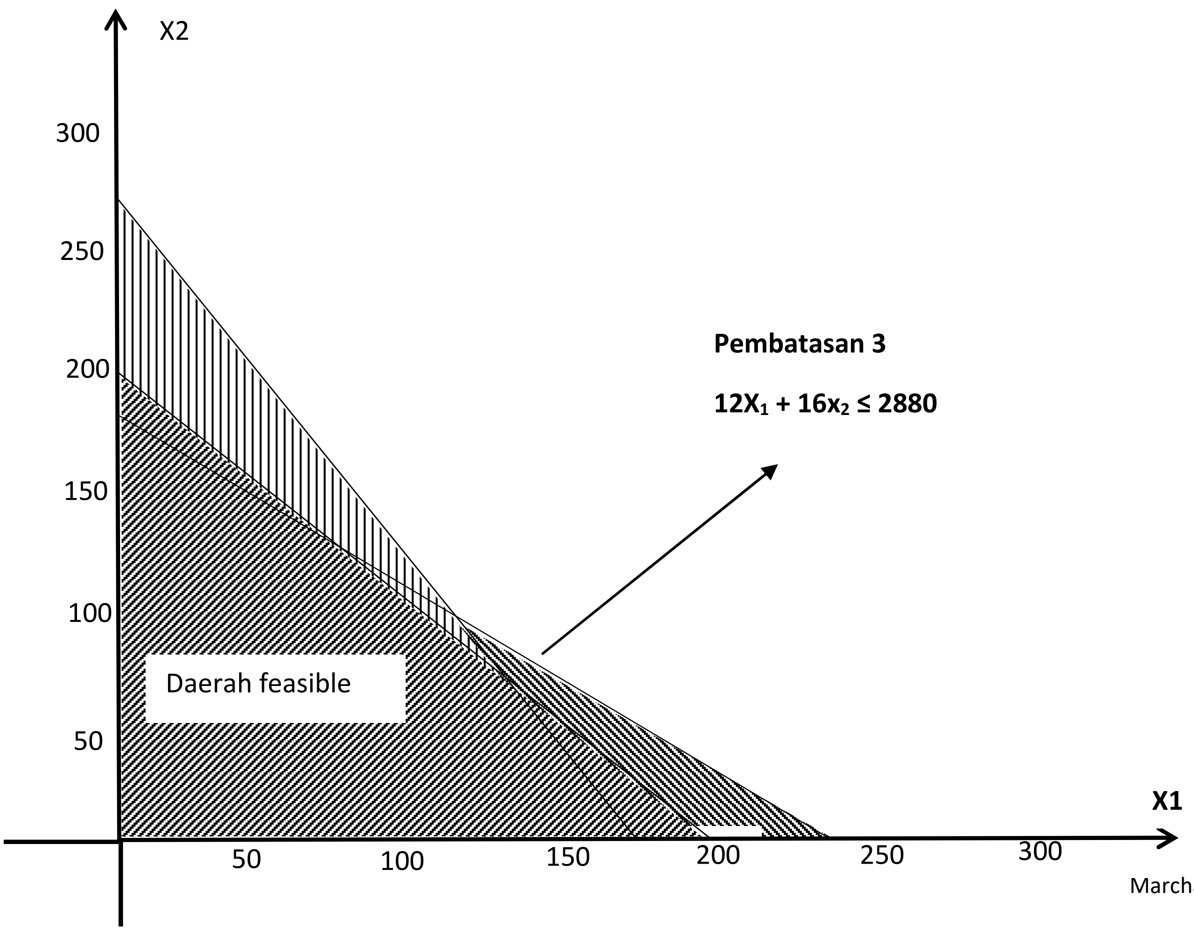
Gambarlah garis pembatasan persoalan pemrograman linier :



Gambar 9.4 garis pembatasan 1



Gambar 9.5 garis pembatasan 2



Gambar 9.5 garis pembatasan 3 dan daerah feasible

Setelah daerah feasible diketahui selanjutnya menentukan solusi optimum melalui metode Isoline atau metode titik ekstrim.

Solusi optimum dengan Metode Isoline

Membuat beberapa garis yang sejajar dengan garis fungsi tujuan (isoline) pada daerah feasible hingga batas terluar dari daerah feasible, seperti ditunjukan pada Gambar 9.7 s.d. gambar 9.8.

Solusi optimum dengan Metode Titik Ekstrim

Menentukan nilai fungsi tujuan (Z) secara langsung dari titik-titik ekstrim pada daerah feasible kemudian mencari nilai Z yang paling optimum ($Z = 350x_1 + 300x_2$: maksimum)

Rujukan

Ruminta. 2014. Matriks Persamaan Linear n Pemrograman Linear. Rekayasa sains Bandung.