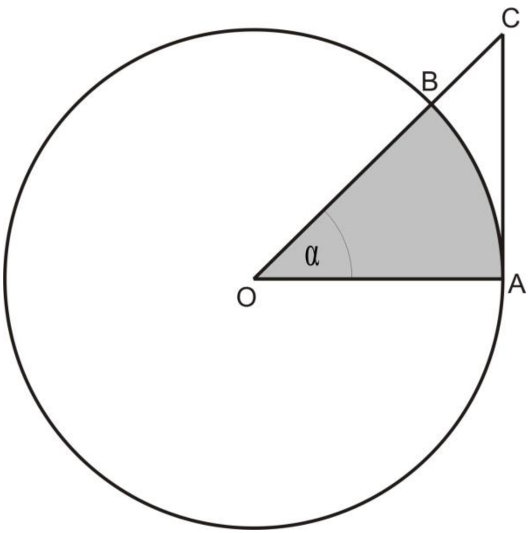
GEOMETRI EUCLIDES

Referensi Materi
Mahasiswa Program Studi Pendidikan
Matematika
Fakultas Matematika & Sains

IKIP Siliwangi Cimahi



Marchasan, Lexbin

Revisi 2, Mandiri. Cimahi, 2020

KATA PENGANTAR

Syukur dipanjatkan kepada Tuhan. Dia telah menciptakan bumi dan langit dan segala isinya dan dengan setia memelihara segala yang diciptakan-Nya. Demikian halnya, Rahmat dan Pemeliharaan-Nya telah dianugrahkan sehingga penulisan materi mata kuliah Geometri Euclides dapat diselesaikan.

Buku ini ditulis atas dasar kebutuhan mengacu pada karakteristik mahasiswa, silabus / satuan acara perkuliahan (SAP), dan jawaban atas beban penulis berdasar kepercayaan Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Matematika & Sains IKIP Siliwangi Cimahi Tahun ajaran 2017/2018 dan 2019/2020 semester dua. Dan merupakan kompilasi rujukan rujukan relevan.

Dana penggandaan, sepenuhnya merupakan swadaya mahasiswa. Untuk itu, kepada anak-anak-ku disampaikan ucapan terimakasih. Lebih dari itu, swadaya mahasiswa **kelas A_3 angkatan 2018 dan A_3 dan B_2 angkatan 2019** ; menuju pada harapan, terbitnya buku materi perkuliahan ini melalui percetakan resmi. Sehingga kedalaman kajian konsep materi akan nampak lebih tajam, dan dapat digunakan lebih banyak pembelajar pada saatnya.

Sekalipun buku ini ditulis untuk memenuhi kebutuhan, mudahan bisa memenuhi syarat cukup.

Harapan, manfaat yang didapat sebagaimana tujuan. Untuk mewujudkannya; saran, koreksi atas materi ajar ini diharapkan dari semua pihak. Dan tentu, penulis akan terus menyempurnakannya.

Cimahi, 24 Februari 2020

penulis

DAFTAR ISI

GEOMETRI

EUCLIDES BIDANG

Geometri Euclides pada bidang, selanjutnya kiita sebut sebagai geometri Euclides. Adalah geometri yang secara khusus bekerja hanya pada bidang.

Titik Garis Segmen Garis dan sinar

Suatu bidang yang padanya diberlakukan geometri Euclides adalah sebuah himpunan yang unsur-unsur tak terdefinisikannya dinamakan titik. Inilah bidang Euclides, apabila pada himpunan titik-titik ini kita berlakukan suatu struktur geometri yang terbagi atas unsur-unsur tak terdefinisi macam-macam aksioma definisi-definisi dan teorema-teorema.

Unsur-unsur tak terdefinisi adalah titik dan himpunan-himpunan bagian bidang yang dinamakan garis.

- Sistem aksioma insidensi

- Sebuah garis kumpulan titik titik yang tak kosong dan mengandung sedikitnya 2 titik
- Kalau ada dua titik, maka ada tepat sebuah garis yang memuat dua titik tersebut
- Ada tiga titik yang tak semua terletak pada satu garis

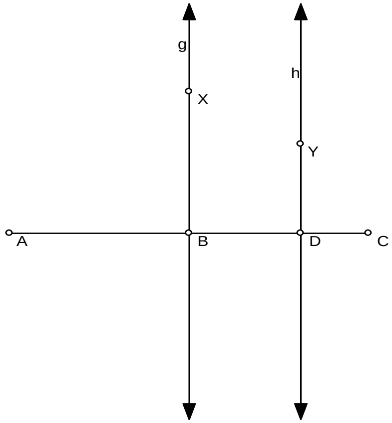
- Sistem aksioma urutan, yang mengatur konsep urutan tiga titik pada sebuah garis, konsep setengah garis (sinar), dan konsep ruas garis.
- Sistem aksioma kekonggruenan, yang mengatur kekongruenan dua ruas garis, kekongruenan dua segitiga, cst.
- Aksioma kekontiniuan (aksioma archimedes) yang mengatakan bahwa apabila a,b ϵ R^+ dengan a < b maka ada bilangan asli n sehingga na > b.
- Aksioma kesejajaran Euclides yang menyatakan bahwa apabila ada dua garis a dan b yang // dan dipotong garis ketiga c dititik A $\in$ a dan titik B $\in$ b sehingga jumlah besarnya dua sudut dalam sepihak di A dan B kurang dari 180^0, maka a dan b akan berpotongan pada bagian bidang yang terbagi oleh garis c yang memuat kedua sudut dalam sepihak itu

Catatan :

Setelah lebih 2000 tahun, sifat yang setara dengan aksioma kesejajaran Euclides adalah aksioma Playfair (abad XIX). Aksioma ini adalah sebagai berikut; adaikan ada garis g dan sebuah titik P $\in$ g . maka ada tepat satu garis h melalui P yang sejajar dengan garis g.

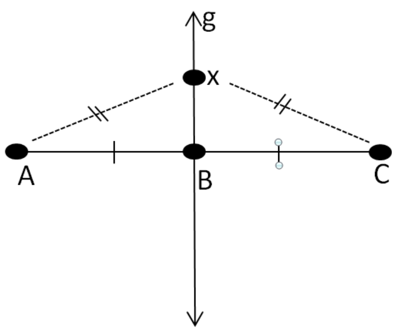
Dengan adanya aksioma ini, apabila aksioma Euclides dianggap sebagai aksioma, berarti sifat Playfair dapat dibuktikan dan apabila aksioma Playfair dianggap sebagai aksioma, maka sifat yang terkandung dalam aksioma Euclides dapat dibuktikan. Apabila sebuah geometri hanya memenuhi aksioma pertama hingga keempat, geometri tsb dinamakan geometri netral (geomteri absolut). Apabila dalam geometri netral juga memberlakukan akisoma yang mengatakan bahwa melalui sebuah titik P diluar sebuah garis g ada lebih dari satu garis yang sejajar g, maka geometri ini dinamakan geometri Lobachevsky (Rusia abad XVIII). Ini adalah salah satu contoh geometri non Euclides, yaitu geometri yang tidak menganut aksioma kesejajaran Euclides.

Dalam sebuah geometri yang menganut semua sistem aksioma di atas dapat dibuktikan bahwa jumlah besarnya sudut-sudut dalam setiap segi tiga adalah sama dengan besarnya sudut lurus. Dan apabila tanpa aksioma terakhir ditambah aksioma kesejajaran Lobachevsky jumlah itu kurang dari sudut lurus. Selanjutnya dalam geometri netral jumlah tersebut adalah kurang atau sama dengan besarnya sudut lurus.



andai $\overline{AC}$ sebuah ruas garis dan B titik tengah ruas garis itu. Andai g sebuah garis yang melalui B dan yang tegak lurus pada $\overline{AC}$. Apabila sebuah titik X ∈ g maka XA = XC (XA artinya panjang ruas garis AX), sehingga XA adalah sebuah bilangan real positif yang disebut jarak antara titik A dan titik X, dan apabila X=A berarti jarak ini sama dengan nol.

Membuktikan bahwa benar XA = XC; kita tarik ruas garis XA dan ruas garis XC (perhatikan sketsanya di bawah).



Perhatikan Δ ABX dan Δ CBX.

Maka berlakulah BA = BC, sebab B titik tengah $\overline{AC}$

BX = BX

Besar $\angle$ ABX = besar $\angle$ CBX, sebab B $\perp$ $\overline{AC}$

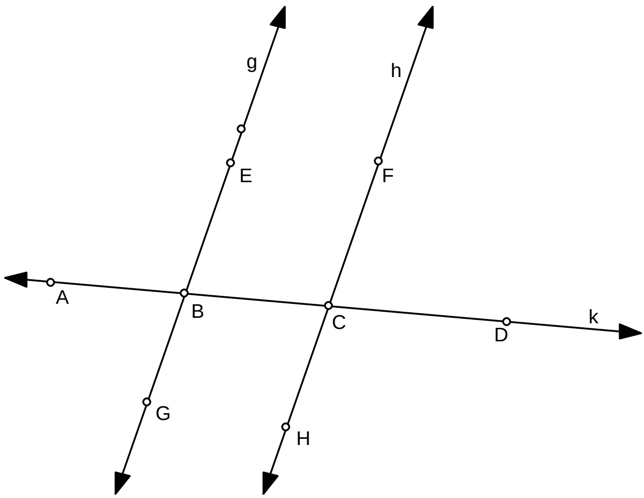
Dengan demikian maka Δ ABX $\cong$ Δ CBX berdasar sifat kekongruenan dua segi tiga aturan S - Sd - S (sisi -sudut - sisi).

Tugas Mahasiswa 1

Lakukan kajian atas sifat kekongruenan yang lain ex; Sd-S-Sd.

Sepasang Garis yang Sejajar

Perhatikan sketsa di bawah berikut.



Garis g // garis h, yang kemudian dipotong garis k di titik B dan titik C.

Berdasar aksioma kesejajaran Euclides dapat simpulan berikut;

- m ($\angle$ABE) = m($\angle$BCF), karena sehadap. (m ($\angle$ABE) = besar dari sudut ABE)
- m ($\angle$ABE)=m($\angle$BGC), karena bertolak belakang
- m($\angle$ABE)=m($\angle$HCD), karena luar bersebrangan
- m($\angle$CBE)=m($\angle$BCH), karena dalam bersebrangan

Tugas Mahasiswa 2

Buat permasalah sejalan konsep sepasang garis yang // dan selesaikan.

<u>Soal latihan 1</u>

1. buktikan bahwa hanya ada satu garis a melalui sebuah titik pada sebuah garis b, sehingga $a \perp b$.
2. Diketahui tiga titik A, B, dan C yang tak segaris. Lukis lingkaran yang melalui tiga titik ini.

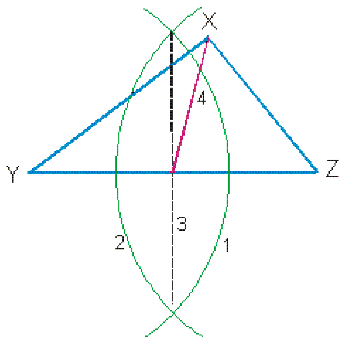
Garis – garis istimewa dalam segitiga

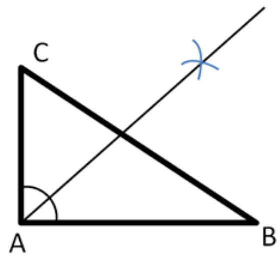
Terlebih dahulu dengan menggunakan jangka n dua pengaris segitiga kita melukis garis:

- Garis sumbu Garis tinggi
- Garis bagi Garis berat

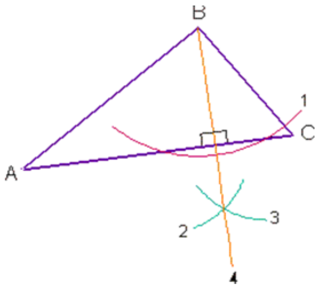
Dalam sebuah segi tiga diketahui ada macam-macam garis yang istimewa, yaitu garis bagi sudut, garis berat, dan garis tinggi.

Perhatikan gambar (a) (b) (c) di bawah





(b)



(c)

Tugas Mahasiswa 3

1. Temukan garis berat bagi dan tinggi sesuai kondisi yang nampak pada sketsa di atas. Jelaskan.
2. Kaji literatur tentang lingkaran (kelompok, kumpul saat UTS)

Garis bagi adalah garis yang ditarik dari salah satu sudut pada segitiga sehingga membagi sudut tersebut menjadi dua sama besar

Garis berat suatu segitiga adalah garis yang ditarik dari titik sudut suatu segitiga sehingga membagi sisi didepannya menjadi dua bagian sama panjang

Garis tinggi segitiga adalah garis yang melalui salah satu sudut segitiga dan tegak lurus dengan sisi didepannya

Dapat dibuktikan bahwa :

- Ketiga garis bagi dalam setiap segitiga melalui satu titik

- Ketiga garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik
- Ketiga garis tinggi dalam setiap segitiga melalui satu titik

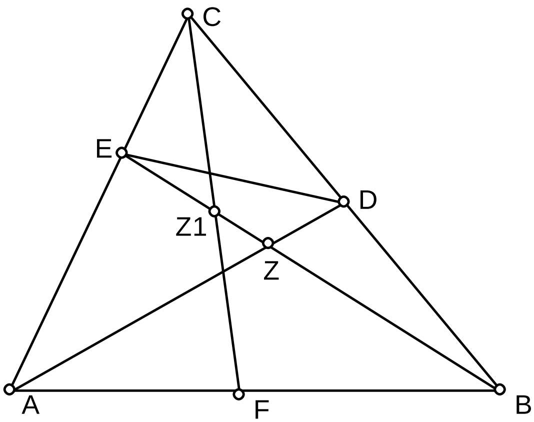
Bukti. (untuk titik pertama ingat konsep jarak titik dg garis)

- Apabila $\overleftrightarrow{AD}$ garis bagi dari $\angle$BAC , maka setiap titik pada $\overleftrightarrow{AD}$ letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$.

(titik tersebut letaknya sama jauhnya dari $\overleftrightarrow{BA}$ dari $\overleftrightarrow{BC}$).

Andaikan $\overleftrightarrow{BH}$ dan $\overleftrightarrow{AD}$ berpotongan disebuah X, maka X ini letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{AB}$ (karena X anggota $\overleftrightarrow{AD}$) , pula X letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{BA}$ dan $\overleftrightarrow{BC}$ (karena X ∈ $\overleftrightarrow{BH}$). Jelas X letaknya sama jauh dari $\overleftrightarrow{CA}$ dan $\overleftrightarrow{CB}$. Ini berarti bahwa X terletak pada garis bagi dari $\angle ACB$, yang berarti pula bahwa $\overleftrightarrow{CX}$ adalah garis bagi $\angle ACB$. (SS)

- Andai $\overleftrightarrow{AD}$ garis berat yang melalui titik sudut A maka CD = DB, andai $\overleftrightarrow{BE}$ garis berat yang melalui titik sudut B maka AE = EC. Andai $\overleftrightarrow{AD}$ dan $\overleftrightarrow{BE}$ berpotongan di Z, yang harus dibuktikan bahwa garis berat yang melalui C juga akan melalui Z (perhatikan gambar)



Saudara ketahui bahwa ΔCED ≈ ΔCAB, ini karena ΔECD dan ΔACB memiliki $\angle C$ bersama sedangkan sisi-sisi sudut itu sebanding. Artinya CE : CA = CD : CB = 1:2. Dengan demikian maka $\overleftrightarrow{ED}$ // $\overleftrightarrow{AB}$ dan ED : AB = CE : CA = 1 : 2

Juga m($\angle$DEZ)=m($\angle$ABZ) dan m($\angle$EZD)=m($\angle$AZB)... <u>alasan Masasiswa diskusikan dalam perkuliahan</u>... . jadi ΔEZD ≈ ΔAZB, sehingga EZ : ZB = ED : AB = 1: 2 = DZ : AZ.

Andaikan $\overleftrightarrow{CF}$ garis berat yang melalui C dan memotong $\overleftrightarrow{EB}$ di Z1 maka dengan cara yang serupa saudara dapat membuktikan bahwa $EZ_1 : Z_1B = 1 : 2$. Jadi kita peroleh EZ = $\frac{1}{3}EB$ dan juga $EZ_1 = \frac{1}{3}EB$. Sehingga $Z_1 = Z$.

Ini berarti bahwa garis berat dalam setiap segitiga melalui satu titik.

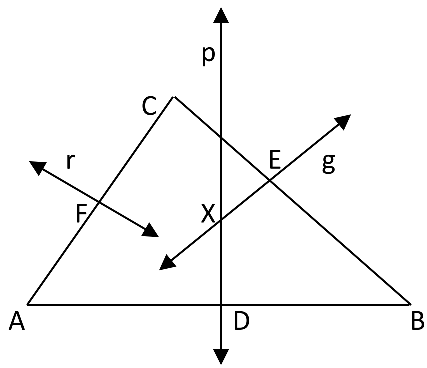
- Membuktikan ketiga garis tinggi dalam setiap segitiga melalui satu titik.

Kita gunakan sifat bahwa <u>sumbu-sumbu sisi- sisi setiap segitiga</u> melalui satu titik

(ini kita buktikan terlebih dahulu).

Perhatikan gambar di bawah.

Saudara lihat segitiga ABC; garis p adalah sumbu $\overleftrightarrow{AB}$ yang memotongnya di D. gari g adalah sumbu $\overleftrightarrow{BC}$ yang memotongnya di E, dan r adalah sumbu $\overleftrightarrow{CA}$ yang memotongnya di F.



Andaikan p dan g berpotongan di X. kita akan membuktikan bahwa r akan melalui X.

Ingat konsep sebelumnya bahwa XA = XB sebab X terletak pada sumbu $\overline{AB}$. Begitu pula XB = XC sebab X terletak pada sumbu $\overline{BC}$.

Jadi XA = XC yang berarti X terletak pada sumbu $\overline{AC}$. Dengan kata lain perkataan sumbu-sumbu p, g, r

melalui satu titik yaitu titik X.

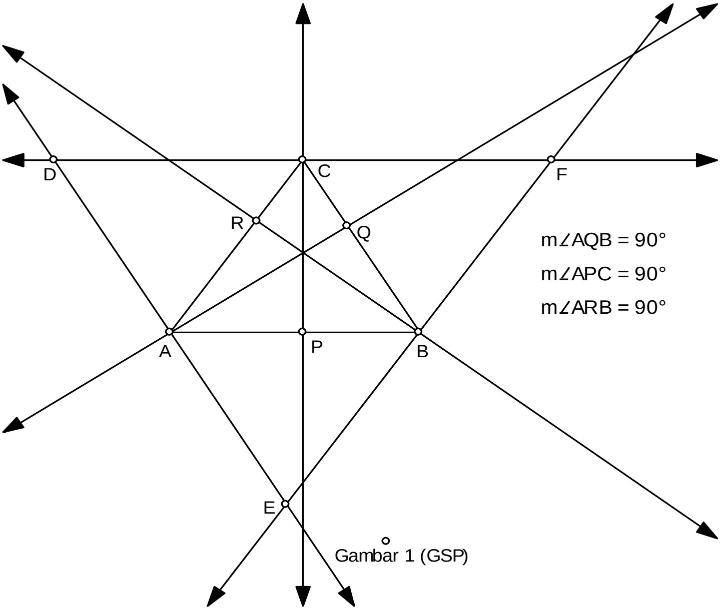
Catatan:

X merupakan pusat lingkaran luar segi tiga ABC. Yaitu lingkaran yang melalui titik-titik A, B, dan C.

Tugas Mahasiswa 4.

Menunjukan kebenaran pernyataan dalam catatan di atas dengan melukisnya menggunakan jangka dan penggaris.

Perhatikan gambar 1 (GSP)



Pada segitiga ABC pada gambar 1 (GSP) di atas. Dari titik A, B, dan C dibuat garis-garis yang masing-masing sejajar dengan sisi hadapnya sudut itu.

Apabila garis-garis itu berpotongan di D, E, dan F maka

$$\overline{DE} \parallel \overline{CB};\ \overline{EF} \parallel \overline{AC};\ \overline{DF} \parallel \overline{AB}.$$

Perhatikan segi-4 ABFC, maka ia adalah suatu jajar genjang sebab $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$. Sehingga AB = CF; begitu pula ABCD adalah jajar genjang. Jadi AB = DC. Maka DC = CF, yang berarti bahwa C titik tengah $\overline{DF}$; demikian pula B titik tengah $\overline{EF}$ dan A titik tengah $\overline{DE}$. Bila $\overleftrightarrow{AQ}$ dan $\overleftrightarrow{BR}$ garis-garis tinggi ΔABC yang melalui A dan B, maka garis-garis tinggi ini adalah sumbu-sumbu dari sisi $\overline{DE}$ dan $\overline{EF}$ dalam ΔDEF. Begitu pula $\overline{CP}$ adalah sumbu sisi $\overline{DF}$. Karena sumbu-sumbu dalam ΔDEF melalui satu titik maka garis-garis tinggi $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$, dan $\overleftrightarrow{CP}$ melalui satu titik pula

<u>Soal latihan 2</u>

1. Diketahui segi-tiga ABC, segmen garis AD adalah garis bagi sudut BAC. Mengapa titik pada garis AD letaknya sama jauh dari garis AC dan dari garis AB. Tunjukan.
2. Andai ada segi-tiga ABC. Andaikan garis AD adalah garis bagi dari sudut BAC. Andaikan garis BE adalah garis bagi dari sudut luar CBF dan garis CH adalah garis bagi dari sudut luar GCB. Maka ketiga garis bagi itu akan berpotongan pada satu titik.

   Tugas kita: membuat sketsa sesuai pernyataan di atas. Lalu membuktikannya.

Penggunaan Software *Geometer's Skethpad* (GSP)**.**

Dilakukan di lab komputer

PETUNJUK PRAKTIS PENGGUNAAN *SOFTWARE GEOMETER'S SKETCHPAD* (Lexbin Marchasan. Tesis. 2010. UPI. Bandung)

Program GSP dapat diaktifkan setelah software diinstall dalam computer. Untuk langkah awalnya adalah;

- Klik menu **Start** kemudian pilih **program GSP**

  Maka akan muncul jendela GSP sebagai berikut;

- Di layar akan muncul jendela toolbox pada sebelah kiri dan menu dibagian atas

Gambar disamping Selection arrow untuk memilih objek. Bila icon diklik dan tekan agak lama kan muncul tiga kotak dialog

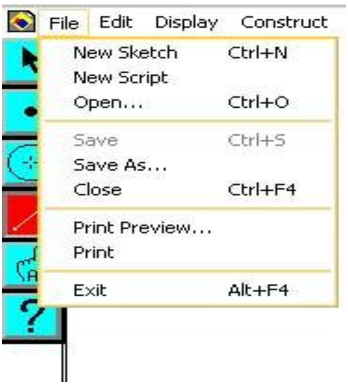
Gambar titik disamping berfungsi untuk membuat titik

Gambar lingkaran disamping berfungsi untuk membuat lingkaran

Gambar disamping adalah untuk menggambar garis. Seperti pada selection arrow, maka ketiga icon tersebut adalah untuk menggambar; segmen garis, sinar dan garis.

Gambar tangan disamping untuk menulis teks dan membuat label

Gambar disamping untuk menampilkan informasi tentang objek atau menu

- 

  Menu file berisi beberapa sub menu; New Sketch untuk membuat file baru New Scrip untuk membuat skrip baru Open untuk membukan file GSP yang sudah tersimpan

Save untuk

menyimpan hasil kerja

Close untuk menutup sebuah file kerja

Print, Print Preview melihat dan mencetak hasil kerja

Exit Untuk keluar

- Menggunakan menu **Undo** dan **Redo**

  Untuk membatalkan eksekusi yang telah dilakukan dapat gunakan menu **Undo** atau **redo** dari menu **edit**

- Menggunakan menu **Construct**

Menu Construct disediakan untuk membuat objek-objek yang berkaitan dengan sifat-sifat geometris. Menggunakan menu Construct dan toolbox membuat lingkaran

dengan beberapa cara yaitu;

a. Pilih menu point kemudian pilih construct dan pilih menu Circle by center and point
b. Pilih toolbox point dan sebuah segmen garis maka dapat construct lingkaran dengan menu circle by center and radius.

- Menggunakan **Menu Measure**

Menu ini digunakan untuk menghit dan mengukur berkaita dengan sifatsifat geometrisobjek.

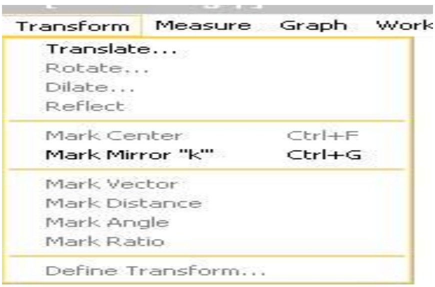
Jika menu ini dipilih maka objek yang dipilih akan berwarna gelap, tidak dipilih kelabu.

Ex. 1 :

a) Gambarlah sebuah segitiga
b) Pilih salah satu sisi. Ukurlah panjangnya dengan menu length

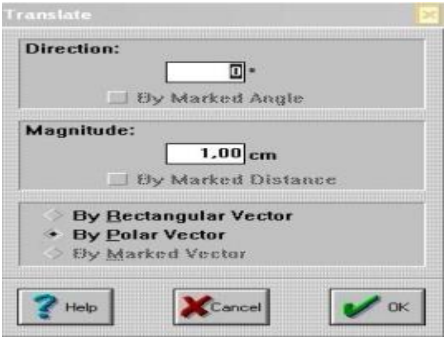
c) Pilihlah ketika titik segitiga kemudian pilih menu **Construct** dan pilih **polygon Interior**
d) Pilih interior dari segitiga kemudian dengan menu **Display** pilih warnanya
e) Pilih interior segitiga kemudian dengan menu **measure** hitunglah luasnya dengan menu **Area**
f) Untuk mengukur besar sudut A, pilih titik-titik BAC atau CAB kemudian dari menu **Measure** pilih menu **Angle**
g) Untuk mengukur keliling suatu bangun pilih semua sisi bangun tersebut kemudian dari menu **Measure** pilih menu **Perimeter**

Menu **Transform**



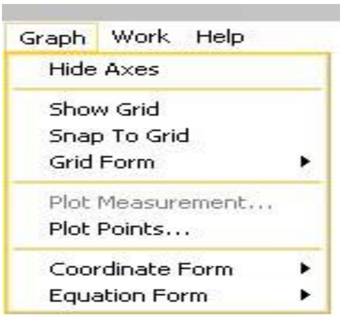
Menu ini dapat digunakan untuk melakukan perintah berbagai transforma bangun geometri. Ex. 2 :

Pilih sebuah bangun kemudian klik menu **transform**, lalu pilih menu **translation** untuk menggeser bangun maka akam muncul dialog box berikut;



Untuk mengatur arah dan jarak pergeserannya. Kemudia Klik **ok**

Menggunakan menu Graph



Menu graph ini disediakan untuk keperluan menggambar bangun geometri dengan memanfaatkan sumbu koordinat. Berbagai pilihan dapat dicoba satu persatu dan bedakan hasilnya.

Dengan *GSP* kita bisa membuat konstruksi berbagai bangun-bangun geometri (dimensi 2) beserta hubungan di antara mereka. Di GSP tersedia berbagai menu menggambar, mulai dari menggambar garis (dan ruas garis) sampai menggambar konflik antara lingkaran dan garis (yang akan menghasilkan dua buah parabola). Walaupun terlihat sederhana karena banyaknya menu yang disediakan, tetapi untuk mengkonstruk gambar ternyata tidak sederhana karena kita masih harus berpikir berbagai macam konsep geometri.

GSP memberikan kesempatan bagi siswa dalam mengkonstruksi obyek-obyek geometris, bereksplorasi, serta melakukan proses penemuan (Eric Bainville, 2005). *GSP* menawarkan suatu dimensi keseluruhan baru dalam membangun obyek-obyek geometris di suatu komputer, seperti menggambar, menarik, dan mengolah figur-figur dari yang paling sederhana ke yang paling rumit pada tahap yang manapun untuk menguji konstruksi, membuat dugaan, mengukur, menghitung, menghilangkan obyek, membuat perubahan atau mengembalikan gambar semula secara lengkap.

Program *Geometer's Sketchapad* (GSP) berguna untuk memfasilitasi siswa dalam mengkonstruksi obyek-

obyek geometri, akan tetapi kurang efektif apabila guru tidak mengontrol kegiatan belajar karena siswa cenderung membuang-buang waktu. Hal ini dapat diatasi dengan meminta siswa mengkonstruksi obyek-obyek geometri sesuai dengan langkah-langkah konstruksi yang telah disiapkan.

Secara umum program GSP terdiri dari *Menu, Toolbar*, dan *Drawing Area*. Pada bagian Menu ditampilkan *File, Edit, Option, Window, dan Help.* Pada bagian Menu ditampilkan *File, Edit, Option, Window, dan Help*. Pada bagian *Toolbar* ditampilkan *toolbox* yang bisa digunakan untuk menciptakan dan memodifikasi satu figure. Toolbox *terdiri dari Pointer, Points, Lines, Curves, Construct, Transform, Macro, Check Property, Measure, Display, Draw*. Bagian

Program *GSP* memiliki sifat dasar seperti :

1) Suatu obyek dapat diubah dengan cara menarik semua bagian obyek pada layar monitor ke suatu tempat lokasi baru. Setiap titik basic atau obyek independen dapat ditarik secara langsung. Suatu obyek yang independen tidak bisa ditarik, tetapi obyek dependen itu dapat diubah dengan cara menarik titik-titik basic atau obyek

independen yang digunakan dalam mengkonstruksi obyek tadi.

2) Dengan menghapus/menghilangkan suatu obyek dari konstruksi yang dependen (bergantung) pada obyek tersebut akan hilang.

3) Tampilan dari obyek-obyek (gambar pada layar monitor dapat di ubah dengan menggunakan kotak menu *Draw*.

4) Titik, garis, atau lingkaran dapat diberikan *Label* dengan memilih menu *Label* pada kotak menu *Display*. Kemudian pindahkan krusor ke obyek yang akan diberi label, tunggu sampai kursor berganti menjadi I dan muncul pesan-pesan "*This Point*", "*This Line*".

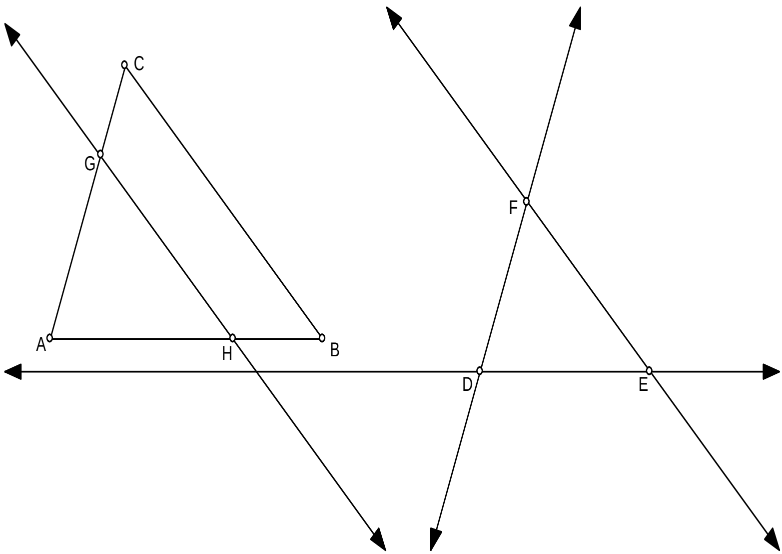
5) Pengukuran panjang, luas, kemiringan dan sudut pada obyek-obyek yang dikonstruksi dapat dilakukan dengan cara menggunakan perangkat yang ada dalam kotak menu *Measure* (ukuran). Pilih menu area dari kotak menu *Measure*. Pindahkan kursor ke suatu sisi dari segitiga sehingga kursor berganti menjadi jari telunjuk dan muncul pesan "*This triangle*" muncul dan klik satu kali. Akan segera muncul suatu bilangan dengan satuan luasnya.

Kesebangunan (similaritas) Dua Segi-3

Dua segi – tiga misalnya ΔABC dan ΔDEF adalah sebangun, ditulis ΔABC ∞ ΔDEF apabila misalnya ada dua pasang sudut yang seletak sama besar.

Jadi kalau $m(\angle CBA) = m(\angle FED)$ dan

$m(\angle CAB) = m(\angle FDE)$ (lihat gambar di bawah).



Andai DF < AC dan DE < AB.

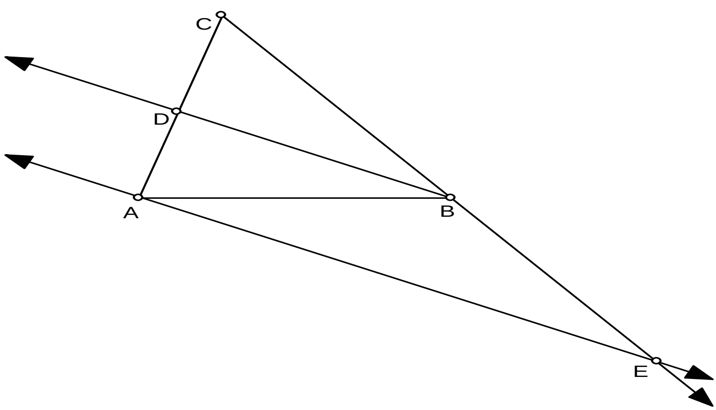
Pada sisi $\overline{AC}$ kita ambil titik G sehingga AG = DF dan titik H pada $\overline{AB}$ sehingga AH = DE. Maka berdasar (S – Sd – S).

Kita peroleh bahwa ΔGAH ≅ ΔFDE, sehingga $m(\angle AHG) = m(\angle DEF)$, berarti $m(\angle ACH) = m(\angle DFE)$ dan $\overleftrightarrow{GH} \, // \, \overleftrightarrow{CB}$: menurut sebuah teorema berlakulah AG:AC = AH:AB dan DF:AC = DE:AB atau DF:DE = AC:AB.

Simpulan, bahwa bila dua segi tiga sebangun maka sisi-sisi yang seletak sebanding.

Beberapa Sifat Penting Garis Bagi

Andaikan ada ΔABC dan dan $\overline{BD}$ garis bagi $\angle ABC$ (lihat gambar di bawah).



Maka ada **Teorema**: AD : DC = AB : CB

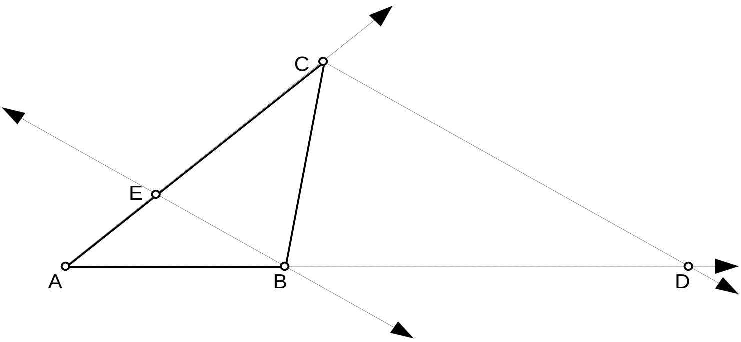
Bukti:

Sesuai gambar di atas, $\angle B_1$ = $\angle B_2$. Tarik $\overleftrightarrow{AE}$ // $\overleftrightarrow{DB}$ yang memotong $\overleftrightarrow{CB}$ disebuah titik E, maka $\angle B_2$ = $\angle AEB$ dan $\angle B_1$ = $\angle BAE$. Oleh karena $\angle B_1$ = $\angle B_2$ maka $\angle BAE$ = $\angle AEB$.

Karena $\overleftrightarrow{DB}$ // $\overleftrightarrow{AE}$, maka AD : DC = BE : CB.

Sehingga AD : DC = AB : CB.

Perhatikan gambar di bawah



Segi tiga ABC. Dengan $\overleftrightarrow{CD}$ garis bagi sudut luar di titik $\angle$ C.

Jadi $\angle C_1$ = $\angle C_2$.

Tariklah $\overleftrightarrow{BE}$ // $\overleftrightarrow{DC}$ maka $\angle EBC$ = $\angle C_1$ (sudut dalam bersebrangan) dan $\angle BEC$ = $\angle C_2$ (sudut sehadap).

Oleh karena $\angle C_1$ = $\angle C_2$ maka $\angle EBC$ = $\angle BEC$ sehingga ΔEBC adalah segi tiga sama kaki. Artinya CE = CB. Karena $\overleftrightarrow{BE}$ // $\overleftrightarrow{DC}$ maka DB : DA = CE : CA atau DB : DA = CB : CA.

Jadi apabila CD garis bagi sudut luar di titik sudut C, maka DB : DA = CB : CA

Soal latihan 3

1. Apabila diketahui dua segi-3 yang sisi-sisi seletak sebanding , maka kedua segi-3 itu sebangun. Buktikan.
2. Andaikan ΔABC ∞ ΔDEF dan ΔDEF ∞ ΔPQR. Buktikan bahwa ΔABC ∞ ΔPQR.
3. Diketahui ΔABC. Ada garis g // $\overleftrightarrow{AB}$; g memotong sisi $\overline{CA}$ di D dan sisi $\overline{CB}$ di E .
   a. Buktikan bahwa CD : CA = CE : CB = DE : AB. Sebaliknya apabila CD : CA = CD : CA = CE : CB maka $\overleftrightarrow{DE}$ // $\overleftrightarrow{AB}$
   b. Buktikan juga bahwa CD : DA= CE : EB apabila $\overleftrightarrow{DE}$ // $\overleftrightarrow{AB}$

4. Dalam sebuah ΔABC. $\overline{BD}$ dan $\overline{AE}$ adalah garis-garis berat melalui B dan A masing-masing. Kedua garis berat itu berpotongan di titik Z .

   Buktikan bahwa

   a. DE = $\frac{1}{2}$ AB

   b. AZ : ZE = 2 : 1 : BZ : ZD = 2 : 1

5. a. Dalam ΔABC. Garis bagi $\overleftrightarrow{AD}$ dan garis bagi $\overleftrightarrow{BE}$ berpotongan di X. Nyatakan perbandingan AX : XD dengan panjang sisi-sisi a, b, c dari ΔABC.

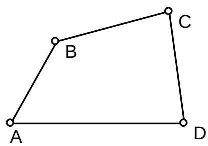
   b. Garis bagi sudut luar dari sudut B memotong garis bagi $\overline{CF}$ (F $\in \overline{AB}$) di titik Y. Nyatakan perbandingan YF : YC dengan a, b, dan c.

Segi Empat

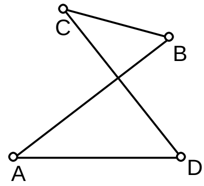
Suatu segi empat ABCD terdiri atas empat titik yaitu A, B, C, dan D yang tiap tiga diantaranyaa tidak ada yang segaris, dan empat ruas garis yaitu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{DA}$. Titik-titik itu dimanakan titik sudut dan ruas garis dinamakan sisi-sisi. Garis-garis $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, dan $\overleftrightarrow{DA}$ dinamakan garis-garis sisi sudut empat. A dan C, dan B dan D dinamakan titik-titik sudut yang berhadapan dalam segiempat ABCD. $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ dinamakan sisi-sisi hadap atau sisi-sisi yang berhadapan. Begitu pula dengan $\overline{BC}$ dan $\overline{DA}$.

Untuk segi-empat ABCD dapat dijumpai tiga hal berikut:

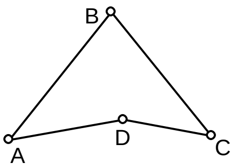
i) Tiap dua titik yang berhadapan terletak pada bagian bidang yang berlainan dari garis yang melalui sepasang titik yang berhadapan yang lain. Segi-empat demikian dinamakan segi-empat yang konvex. Untuk segi-empat yang konvex maka titik-titik dari segi-empat yang tidak terletak pada suatu garis sisi terletak pada suatu bagian bidang dari garis sisi itu. Lihat gambar.



ii) Tiap dua titik sudut yang berhadapan terletak pada bagian bidang yang sama dari garis yang menghubungkan dua titik hadap yang lain. Sekarang ada dua sisi hadap yang berpotongan misalnya $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ Lihat gambar.



iii) Ada dua titik sudut yang berhadapan yang terletak pada bagian berbeda dari bidang yang terbagi oleh sisi yang melalui dua titik yang lain. Lihat gambar



titik-titik sudut A dan C yang berhadapan letaknya pada bagian bidang yang berbeda dari garis BD dan titik-titik sudut B dan D terletak pada bagian bidang yang sama dari garis AC.

Disini kita hanya bicara segi-empat yang konvex. Diagonal sebuah segi-empat adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sudut yang berhadapan.

Perhitungan Ruas-ruas Garis

Andaikan ΔABC sebuah segitiga dengan m($\angle C$) = 90^o. Ruas garis CD adalah garis tinggi pada ruas garis AB. Apabila AC =

b, BC = a, AB = c, maka berlakulah dalil Pythagoras , yang mengatakan $a^2 + b^2 = c^2$.

Tugas Mahasiswa 5

Buktikanlah. Jika panjang ruas garis CD = t, AD = q, DB = p buktikan pula rumus-rumus berikut

- $a^2 = cp$, $b^2 = cq$
- $t^2 = pq$
- $ab = ct$

Dalil Proyeksi

Andaikan ΔABC dengan $m(\angle B) = 90^0$, AC = b, AB = C, dan BC =a. $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ dan BD = p. Maka **$b^2 = a^2 + c^2 + 2cp$**

Bukti :

Oleh karena $m(\angle B) = 90^0$, jadi sudut ABC tumpul maka D terletak di luar ruas segmen garis AB. Apabila CD = t maka $b^2 = (c + p)^2 + t^2$ atau $b^2 = c^2 + 2cp + p^2 + t^2 = c^2 + a^2 + 2cp$. Sebab $p^2 + t^2 = a^2$ **?** (periksa)

Jadi panjangnya sisi yang berhadapan dengan sebuah sudut yang tumpul melebihi panjangnya sisi-sisi yang lain.

Akibat:

Kalau besar sudut B adalah β maka a cos β = p sehingga $p < 0$ kalau $\beta > 90^0$ dan $p > 0$ kalau $\beta < 90^0$

Dengan demikian maka rumus $b^2 = a^2 + c^2 + cp$ dapat ditulis sebagai $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$.

Rumus ini dinamakan rumus cosinus dalam sebuah segitiga.

Tugas Mahasiswa 6

Lukis ruas-ruas garis apabila diketahui dua ruas garis dan memenuhi syarat.

1. Lukislah sebuah ruas garis dengan panjang X, apabila diketahui dua ruas garis lainnya dengan panjang masing-masing a dan b yang memenuhi syarat bahwa x = $\sqrt{ab}$
2. Apabila diketahui ruas garis a dan b. Lukislah rusgaris x dan y sehingga x = $\sqrt{a^2 + b^2}$ dan y = $\sqrt{a^2 - b^2}$
3. Apabila diketahui ruas garis a dan b. Lukislah ruas garis x sehingga x = $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$

Soal latihan 4

1. Jumlah besar sudut-sudut sebuah segi-empat konvex adalah 360^0. Buktikan.

2. Buktikan benar bahwa dalam setiap jajar genjang panjangnya ruas-ruas garis yang berhadapan sama.

Pencerminan

Definisi pencerminan

Suatu pencerminan (refleksi) pada sebuah garis g adalah suatu fungsi M_g yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang v sebagai berikut:

- $Jika \;\; P \in s \; maka \; M_s \; = P$
- $Jika \; P \; bukan \; element \; s$ maka M_g = P' sehingga garis g adalah sumbu pencerminan atau cermin.

Tugas Mahasiswa 7.

1. Diketahui dua titik A dan B. Lukislah sebuah garis g, sehingga M_g(A) = B. Tentukan pula M_g(B).
2. Apabila pada V ada sistem sumbu ortogonal dan A(1,3) sedangkan B(-2, -1). Tentukan persamaan sebuah garis g sehingga M_g(A) = B
3. Diketahui g = {(x,y) | x = -3}
   a. Apabila A(2,1) tentukan A' = M_g(A)
   b. Tentuka C apabila M_g(C) = (-1, 7)

Isometri

Suatu pencerminan atau refleksi pada sebuah garis g adalah suatu isometri.

Teorema :

Sebuah isometris bersifat :

a. Memetakan garis menjadi garis
b. Mengawetkan besar sudut antara dua garis
c. Mengawetkan kesejajaran dua garis

Bukti :

Untuk a.

- Andai g sebuah garis dan T suatu isometri.

Kita akan membuktikan bahwa T(g) = h adalah suatu garis juga. Ambil $\mathrm{A} \in \mathrm{g}$ dan $\mathrm{B} \in \mathrm{g}$ maka $\mathrm{A}' = \mathrm{T}(\mathrm{A}) \in \mathrm{h}$. $\mathrm{B}' = \mathrm{T}(\mathrm{B}) \in \mathrm{h}$: melalui A' dan B' ada satu ruas garis, msal h. Akan kita buktikan $\mathrm{h}' = \mathrm{h}$.

Untuk ini akan dibuktikan $i.$ $\mathrm{h}' \subset \mathrm{h}$ dan $ii.$ $\mathrm{h} \subset \mathrm{h}'$

i. Bukti $\mathrm{h}' \subset \mathrm{h}$

Ambil $\mathrm{x}' \in \mathrm{h}'$. Oleh karena bidang kita adalah bidang euclides, kita andaikan (A’, X’, B’), artinya $\mathrm{A}'\mathrm{X}' + \mathrm{X}'\mathrm{B}' = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$. Oleh karena T suatu isometris. jadi suatu transformasi maka ada x sehingga T(x)=X’ dan oleh karena T suatu isometri maka AX = A’X’. Begitu pula XB= X’B’. Jadi pula $\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = \mathrm{AB}$. I=Ini berarti bahwa A, X, B segaris pada g. ini berarti juga bahwa X’=T(X)∈ h sehingga h’⊂ h sebab bukti serupa berlaku untuk posisi X’ dengan (X’ A’ B’) atau (A’ X’ B’) atau (A’ B’ X’)

ii. Bukti $\mathrm{h} \subset \mathrm{h}'$

Ambil $\mathrm{Y}' \in \mathrm{h}$ maka ada $\mathrm{Y} \in \mathrm{g}$ sehingga T(Y)= Y' dengan Y missalnya (AYB) artinya $\mathrm{Y} \in \mathrm{g}\,\mathrm{dan}\ \mathrm{AY} + \mathrm{YB} = \mathrm{AB}$. Oleh karena T sebuah isometris maka $\mathrm{A}'\mathrm{Y}' = \mathrm{AY},\ \mathrm{Y}'\mathrm{B}' = \mathrm{BY}, \mathrm{A}'\mathrm{B}' = \mathrm{AB}$. sehingga $\mathrm{A}'\mathrm{Y}' + \mathrm{Y}'\mathrm{B}' = \mathrm{A}'\mathrm{B}'$. Ini berarti bahwa A’, Y’, B’ segaris, yaitu garis yang melalui A' dan B'.

Oleh karena h’ satu-satunya garis yang melalui A' dan B' maka $\mathrm{Y}' \in \mathrm{h}'$. $\mathrm{jadi\ haruslah\ h} \subset \mathrm{h}.'$.

Bukti serupa berlaku untuk keadaan (Y A B) atau (A B Y) sehingga $\mathrm{h} = \mathrm{h}'$. Jadi kalau g sebuah garis maka h=T(g) adalah sebuah garis

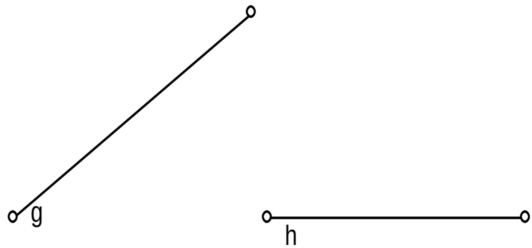
Bukti

Untuk b.

- *Ambil sebuah segitiga ABC* - pembahasan tak dilanjutkan.

Tugas Mahasiswa 8

Perhatikan gambar di bawah.



Diketahui garis g dan h seperti pada gambar. Dengan menggunakan jangka dan penggaris lukislah garis g' = M_h(g).

Setengah Putaran

Pencerminan pada garis adalah suatu involusi. Dan suatu setengah putaran mengelilingi sebuah titik adalah contoh lain sebuah involusi.

Suatu setengah putaran mencerminkan setiap titik bidang pada sebuah titik tertentu. Oleh karena itu, suatu setengah putaran juga dinamakan pencerminan pada suatu titik atau refleksi pada suatu titik.

Definisi :

sebuah setengah putaran pada suatu titik A adalah suatu padanan S_A yang didefinisikan untuk setiap titik pada bidang sebagai berikut :

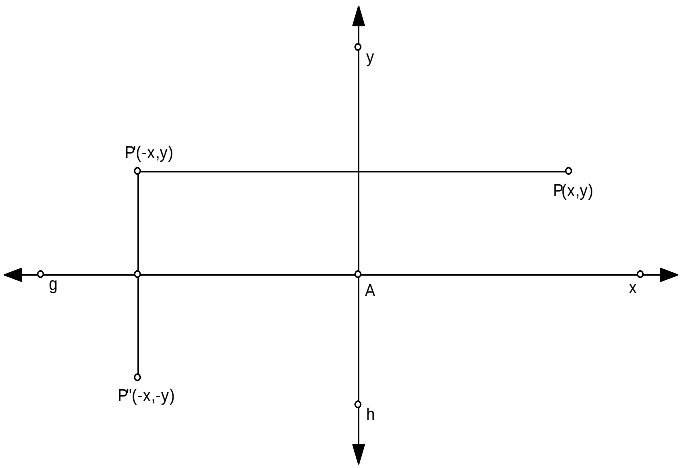
1. Apabila $\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$ maka $\mathrm{S_A(P) = P'}$sehingga A adalah titik tengah pada garis $\overleftrightarrow{\mathrm{PP'}}$
2. $\mathrm{S_A(A) = A}$

Teorema

Andaikan A sebuah titik dan g dan h dua garis tegak lurus yang berpotongan di A. Maka $\mathrm{S_A = m_g m_h}$

Bukti :

oleh karena g tegak lurus h maka kita dapat membuat sebuah sistem sumbu orthogonal dengan g sebagai sumbu x dan h sebagai sumbu y. A dipakai sebagai titik asal. Lihat gambar.



Harus dibuktikan bahwa untuk setiap P berlaku

$S_A(P) = m_g m_h(P)$. Andaikan $P(x, y) \neq A$ dan andaikan pula bahwa $S_A(P) = P"(x_1, y_1)$ oleh karena A titik tengah $\overline{PP'}$ maka (0,0)=$\left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right)$ sehingga $x_1 + x = 0$ dan $y_1 + y = 0$ atau $x_1 = -x$ dan $y_1 = -y$. Jadi $S_A(P) = P(-x, -y)$.

Perhatikan sekarang komposisi pencerminan

$(M_g M_h)(P) = M_g[M_h(P)] = M_g[(-x, y)] = (-x, -y)$ ... maka

$S_A(P) = M_g M_h(P)$ ... maka

$M_g M_h(P) = S_g(A) = A$

Sedangkan $S_A(A) = A$. Jadi juga $M_g M_h(A) = S_A(A)$ sehingga untuk setiap P pada bidang berlaku

$M_g M_h(A) = S_A(P)$

Ini berarti : $M_g M_h = S_A$

... dan seterusnya.

Geseran (Translasi)

Ketentuan dan sifat

merupakan hasil kali dua pencerminan pada dua garis yang sejajar

<u>Teorema</u> :

Andaikan g dan h dua garis yang sejajar.

Apabila ada dua titik A dan B maka $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AB''}$ dengan $A'' = m_h m_g(A)$ dan $B'' = m_h m_g(B)$

<u>Bukti:</u>

... dan seterusnya.tak dibahas di sini.

Ruas Garis Berarah

<u>Definisi</u>.

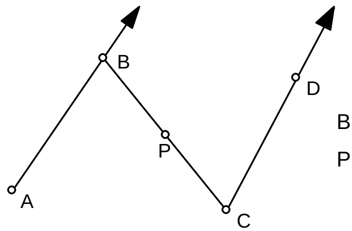
Suatu ruas (garis) berarah adalah sebuah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan (titik) pangkal dan ujung yang lain dinamakan (titik) akhir.

Apabila A dan B dua titik. Lambang $\overrightarrow{AB}$ kita gunakan sebagai ruas garis berarah dengan pangkal A dan titik akhir B.

Ruas garis $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ disebut kongruen apabila AB = CD. Perhatikan bahwa walaupun AB = CD, $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ tidak perlu sama. $\overline{AB}$ adalah sebuah himpunan sedangkan AB adalah bilangan real.

Kalau $\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ kongruen kita menulisnya sebagai $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Perhatikan gambar.



Andakan sekarang ada dua ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$. Dalam membandingkannya tidaklah cukup kalau AB = CD, tapi kedua ruas garis berarah itu juga haarus searah.

Jika demikian, ruas berarah $\overrightarrow{AB}$ ekuivalen dengan ruas berarah $\overrightarrow{CD}$. Ditulis $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$

Definisi.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ apabila $S_P(A) = D$.Dengan P titik tengah $\overline{BC}$

Soal latihan 5

1. Sebuah jajar genjang yang dua sisi yang berdampingan sama panjang dinamakan sebuah belah ketupat. (buktikan)
2. Dalam sebuah belah ketupat diagonal-diagonalnya tegak lurus sesamanya dan membagi sama besar sudut-sudut yang titik sudutnya dilaluinya. (buktikan)

3. Andai ABCD trapesium. E titik tengah kaki $\overline{AD}$ dan F titik tengah kaki $\overline{BC}$. Buktikan bahwa $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$.
4. Apabila $A(2,3)$ tentukan:
   a. $S_A(C)$ apabila $C = (2,3)$
   b. $S_A(D)$ apabila $D = (-2,7)$
5. Apabila $C = (-4,3)$ dan $g = \{(x, y)|5y - x\}$,tentukanlah:
   a. $m_g s_c(2,4)$
   b. $m_g s_c(P)$. Jika $P = (x, y)$
6. Jika y =2x + 1, tentukan M_y(A), jika A = {x | x = 2}

Rujukan

1. **G.E.** Martin *The Foundations of Geometry and the Non – Eucliddean Plane.* ... **2.** e Book. cst yg relevan.