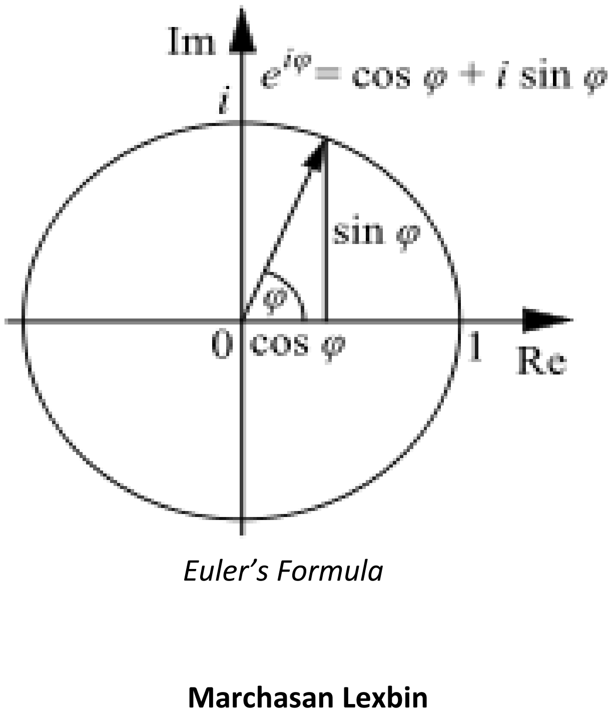
FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Referensi Materi Perkuliahan
Bagi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika
IKIP SILIWANGI



Euler's Formula

Marchasan Lexbin

Mandiri, 2019

KATA PENGANTAR

Syukur dipanjatkan kepada Tuhan. Dia yang telah menciptakan bumi dan langit dan segala isinya dan dengan setia memelihara segala yang diciptakan-Nya. Telah menyatakan Rahmat dan Pemeliharaan-Nya sehingga penulisan buku materi perkuliahan mata kuliah fungsi variabel kompleks untuk mahasiswa fakultas keguruan dan ilmu pendidikan program studi pendidikan matematika ini dapat diselesaikan.

Buku ini ditulis atas dasar kebutuhan. Mengacu pada karakteristik mahasiswa yang dihadapi penulis dalam perkuliahan, silabus dan satuan acara perkuliahan. Pula merupakan kompilasi dari berbagai buku sumber yang ada dan relevan dengan tujuan.

Dana penggandaan, sepenuhnya merupakan swadaya mahasiswa. Untuk itu, kepada anak-anak-ku disampaikan ucapan terimakasih. Swadaya mahasiswa kelas $A_{\dots}$, dan kelas $B_{2,3,4}$ tahun ’16-1 dan kelas B_4 tahun ’17-1 dan kelas $A_{1,2}$, B_4 tahun 18-1 dan A_1, $B_{1,4}$ 19-1 juga menuju pada terbitnya buku materi perkuliahan ini melalui percetakan resmi. Sehingga nantinya selain kedalaman kajian konsep materi yang akan nampak lebih luas, juga dapat digunakan lebih banyak pembelajar. Semoga atas RidhoNya, pada saatnya hal ini terwujud.

Dengan selesainya buku ini, mudahan bisa menjadi penghantar bagi mahasiswa, setidaknya yang saat ini penulis hadapi, mencapai kompetensi optimal.

Bersamaan harapan, saran dan koreksi atas kekurangan buku ajar ini dari semua pihak sangat dinanti.

DAFTAR ISI

Hal

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISI ii

BAB I BILANGAN KOMPLEKS 1

A. Sistem Bilangan Kompleks 1

B. Bidang Kompleks 4

C. Konjugat Kompleks 5

BAB II BENTUK KUTUB DARI BILANGAN KOMPLEKS 10

A. Bentuk Kutub dari Bilangan Kompleks 11

BAB III BENTUK PANGKAT AKAR LOGARITMA BARISAN DARI BILANGAN KOMPLEKS 19

A. Bentuk Pangkat dari Bilangan Kompleks 19

B. Bentuk Akar dari Bilangan Kompleks 21

C. Logaritma dan Pangkat Umum 24

D. Barisan Bilangan Kompleks 27

BAB IV FUNGSI KOMPLEKS FUNGSI EKSPONEN FUNGSI TRIGONOMETRIK FUNGSI HIPERBOLIK 32

A. Fungsi Kompleks 32

B. fungsi Eksponen dari Bilangan Kompleks 34

C. fungsi Trigonometrik dan Fungsi Hiperbolik 38

BAB V LIMIT DAN FUNGSI ANALITIK 43

A. Limit 43

B. Fungsi Analitik 44

Daftar Rujukan 50

.

BAB I

BILANGAN KOMPLEKS

A. Sistem Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan kompleks disimbolkan dengan C. Konsep ini muncul secara alamiah pada abad ke-16 ketika para matekiawan hendak mengekspresikan seluruh akar dari polynomial. Sehingga akhirnya himpunan bilangan kompleks mampu menyelesaikan persamaan dalam bentuk: $x^2 + 1 = 0$

1. Definisi

Bilangan kompleks z adalah pasangan terurut (x,y) dari bilangan nyata x, y dan ditulis:

$Z = (x,y) = x + iy$ …………………………………….. (1.1)

i sebagai satuan imajiner, $i = \sqrt{-1} = (0,1)$ ……… (1.2)

dan $X = \text{Re } z$, $y = \text{Im } z$

2. Operasi pada Bilangan Kompleks

Operasi dimaksud adalah operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan diketahui dua buah bilangan kompleks: $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$. Dan dari rumus (1.2): $i^2 = -1$

maka;

Untuk operasi penjumlahan:

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ ………………………… (1.3)

Untuk operasi pengurangan:

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ …………………………… (1.4)

Untuk operasi perkalian:

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ ……………………. (1.5)

Untuk operasi pembagian:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \quad \text{………………. (1.6)}$$

Didapat dari $\frac{z_1}{z_2} . \frac{z_2}{z_2}$, dengan z_2 setangkupnya z_2

Contoh masalah 1

Diketahui $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 4 + 3i$. tentukan;

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

solusi;

dari soal diketahui bahwa; x_1 = 2 dan y_1 = 1 sementara x_2 = 4 dan y_2 3. Sehingga :

a) $z_1 + z_2$ = (2+i) + (4+3i)

= (2+4) + (i+3i)

= 6 + 4i

b) $z_1 - z_2$ = (2+i) - (4+3i)

= -2 - 2i

c) z_1z_2 = (2+i)(4+3i)

= 2.4 + 2.3i + i.4 + i.3i

= 8 + 6i + 4i + (-3)

= 5 +10i

d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+i}{4+3i}$

$= (\frac{2+i}{4+3i})(\frac{4-3i}{4-3i})$

$= \frac{2.4-2.3i+i.4+i(-3i)}{4.4-4.3i+3i.4+3i(-3i)}$

$= \frac{8-6i+4i+3}{16-12i+12i+9}$

$= \frac{11-2i}{25}$

$$= \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$$

3. Sifat operasi aljabar terhadap bilangan kompleks

a. Hukum komutatif :

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ .... 1.7a z_1z_2

$= z_2z_1$ 1.7b

b. Hukum asosiatif :

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ 1.8a

$(z_1z_2)\, z_3 = z_1(z_2z_3)$ 1.8b

c. Hukum distributif :

$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3)$ 1.9

d. Identitas : $0 + z = z + 0 = z$ 1.10

e. Invers penjumlahan :

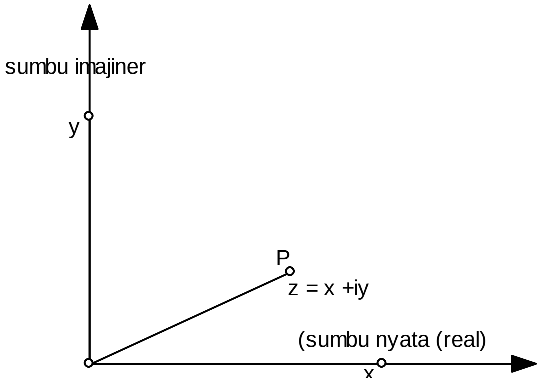
$z + (-z) = (-z) + z = 0$ 1.11

f. Unsur satuan perkalian : $z.1 = z$ 1.12

B. Bidang Kompleks

Bilangan komplek, secara geometris direpresentasikan sebagai titik-titik pada sebuah bidang. Dan bidang yang dipakai mengacu pada system koordinat

Catesian yang terdiri dari sumbu horizontal x (sumbu nyata) dan sumbu vertical y (sumbu imajiner).



Gambar 1 Bidang kompleks

Pada gambar 1 terlihat suatu titik P yang merupakaan representasi suatu bilangan kompleks z = (x,y) = x + iy dengan koordinat x,y. Bidang xy yang merupakan representasi bilangan kompleks tersebut, disebut sebagai bidang kompleks.

Operasi penjumlahan dan pengurangan dapat dijelaskan sebagaimana penjumlahan atau pengurangan pada vektor.

Untuk pernyataan di atas, **tugas mahasiswa** 1;

Diskusikan dalam kelompok-kelompok kecil makna pernyataan di atas dan laporkan hasilnya.

C. Bilangan Konjugat Kompleks

Bilangan konjugat kompleks direpresentasikan sebagai $\bar{z}$. Dari bilangan kompleks z = x + iy

$\bar{z}$ didefinisikan sebagai :

$$\bar{z} = x - iy \quad \ldots\ldots \quad (1.13)$$

Definisi di atas bermakna bahwa bilangan konjugat kompleks $\bar{z}$ didapat dari pencerminan suatu titik z terhadap sumbu horizontal atau sumbu nyata/real x. **tugas mahasiswa 2 secara individu** untuk menunjukan kondisi dimaksud di atas secara geometris.

Sebarang bilangan komplek dan konjunggatnya, bila dikenai operasi berikut; +, -, didapat (**tugas mahasiswa 3 secara individu**, periksa);

Perkalian :

$$Z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1.14)$$

Penjumlahan:

$Z + \bar{Z} = 2x$

$x = \frac{1}{2}(Z + \bar{Z})$ .... (1.15)

persamaan (1.15) ini, menjadi rumusan untuk re z

Pengurangan;

$Z - \bar{Z} = 2iy$

$y = \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) = \text{Im } z$ .... (1.16)

dan persamaan (1.16), juga menjadi rumusan untuk Im z

Jika z hanya terdiri dari bagian nyata (real) : z = x,

maka $\bar{Z} = z$

Kemudian:

$\overline{(Z_1+Z_2)} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$ .... (1.17)

$\overline{(Z_1-Z_2)} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2$ .... (1.18)

$\overline{(Z_1 Z_2)} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$ .... (1.19)

$\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$ ....

(1.20)

Contoh masalah 2 :

Jika $z_1 = 2 + i$ dan $z_2 = 7 - 3i$, maka:

a. $Z_1 + z_2 = (2 + i) + (7 - 3i)$

$= (2 + 7)+(I - 3i)$

$= 9 - 2i$

b. $(Z_1 - z_2)^2 = [(2 +i)-(7-3i)]^2$

$= (-5 -2i)^2$

$= (-5 -2i)(-5 -2i)$

$= 25 + 10i + 10i - 4$

$= 21 + 20i$

c. Re $z_1 = \frac{1}{2}$ [(2` + i)+(2 – i)] = 2

d. Im $z_1 = \frac{1}{2i}$ [(2 + i)-(2 – i)] = 1

Soal latihan 1

1. Jika diketahui

   i) $z_1 = 6 + 5i$ dan $z_2 = 7 - 3i$,

   ii) $z_1 = 8 + 7i$ dan $z_2 = 9 - 2i$,

tentukan

a. $Z_1 + z_2$ e. $\dfrac{z_1}{2z_2}$ i. $\overline{(z_1 / z_2)}$

b. $(Z_1 - z_2)^2$ f. Re z_1 j $3z_1 - 2z_2$

c. Z_1 / z_2 g. Im z_1

d. $\dfrac{2}{z_1^{\,2}}$ h. $\overline{(z_1 z_2)}$

2. Tentukan nilai p dan q, jika diketahui:

   a. $(p + q) - i(p - q) = (3 + i)^2 + i(5 - 2i)$

   b. $(p + q) + i(p - q) = (2 + 5i)^2 + i(2 - 3i)$

3. Sederhanakan hasil dari:

   a. $(2 + i)(3 + 4i)(1 - 2i)$

   b. $(5 + 4i)(3 + 7i)(2 - 3i)$

4. Tentukan nilai x dan y sehingga memenuhi persamaan:

   $(x = y) + i(x - y) = 14,8 + i6,2)$

5. Hasil dari:

a. $\dfrac{2}{z_1^{\,2}}$, jika $z_1 = -3 - 2i$

b. $\dfrac{2z_1}{z_1^{\,2}}$, jika $z_1 = -3 - 2i$

c. $\dfrac{(2z_2)^2}{z_1^{\,2}}$, jika $z_1 = -3 - 2i$ dan $z_2 = 1 - i$

BAB II

BENTUK KUTUB

DARI BILANGAN KOMPLEKS

A. Bentuk Kutub dari Bilangan Kompleks

Representasi bilangan kompleks dalam bentuk kutub (polar) adalah:

Z = r (cos A + i sin A) .... (2.1)

Dengan : x = r cos A,

dan y = r sin A

r = lzl

= $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \sqrt{z\,\bar{z}}$$

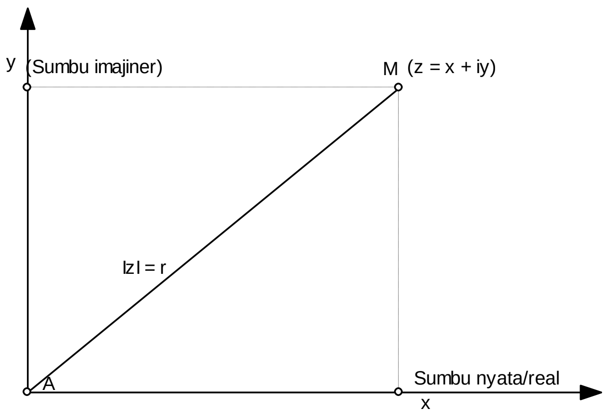
A = sudut yang dibentuk oleh z dengan sumbu riil positif.

Dan A juga disebut sebagai argument dari z, yaitu

A = arg z

$= \text{arc tan}\left(\frac{y}{x}\right)$, $(-\pi < A \leq \pi)$

Representasi geometris untuk bilangan kompleks dalam bentuk polar adalah pada gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1
Bidang kompleks dengan bentuk polar

Contoh masalah 3:

Diketahui $z_1 = 4 – i$, dan $z_2 = -2 + 2i$.

Nyatakan z_1 dan z_2 dalam bentuk polar.

Solusi;

Untuk $z_2 = -2 + 2i$. maka x = -2, dan y = 2.

Dengan demikian besar A atau arg z adalah

A = arctan($\frac{y}{x}$)

= arctan($\frac{2}{-2}$) = 135° = -45° = $\frac{45\pi}{180}$ = $\frac{\pi}{4}$

Dan r = IzI = $\sqrt{x^2 + y^2}$

= $\sqrt{(-2)^2 + 2^2}$

= $\sqrt{8}$

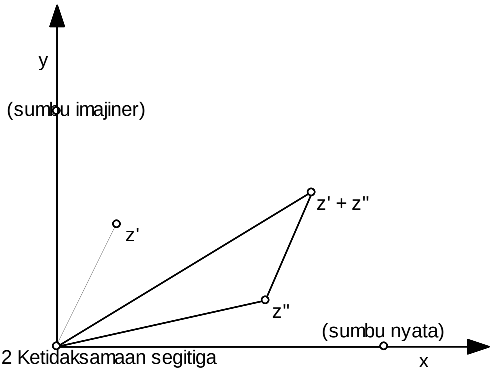
Sehingga $z_2 = -2 + 2i$, bila ditulis dalam bentuk polar menjadi

z_1 = $\sqrt{8}$ (-cos $\frac{\pi}{4}$ + i sin $\frac{\pi}{4}$)

Untuk z_1 ... dijadikan **tugas mahasiswa 4**, yang dikerjakan secara individu.

Pada bilangan kompleks, juga berlaku ketidak samaansegitiga.

Dan dijelaskan sebagai berikut;



Gambar 2 Ketidaksamaan segitiga

Perhatikan gambar 2.2 di atas. Gambar memperlihatkan dengan jelas bahwa untuk setiap bilangan kompleks berlaku ketidaksamaan segitiga berikut :

IZ”+z’I ≤ Iz”I + Iz’I ……………………………… (2.2)

Pada gambar 2.2 terdapat tiga titik yaitu O (titik potong kedua sumbu), z”, dan z” + z’. Ini merupakan vertex-vertex dari segitiga, dengan sisi-sisinya Iz”I, Iz’I, dan IZ”+z’I.

Satu sisinya tak akan melebihi jumlah dari kedua sisi-sisi lainnya.

Rumusan secara umum:

$|Z_1+z_2+\ldots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\ \ldots + |z_n|$

Artinya nilai mutlah suatu penjumlahan tidak akan melebihi jumlah dari nilai mutlak masing-masing.

1. Operasi pada bilangan komples bentuk kutub

   Misal dua buah bilangan kompleks yang dinyatakan dalam bentuk kutub:

$Z_1 = r_1 (\cos A_1 + i \sin A_1)$ dan $Z_2 = r_2 (\cos A_2 + i \sin A_2)$, maka :

- Bila dikenai operasi perkalian, yaitu

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= [r_1 (\cos A_1 + i \sin A_1)\ r_2 (\cos A_2 + i \sin A_2)] \\
&= r_1r_2 [\cos A_1\cos A_2 + \cos A_1 i\sin A_2 + i \sin A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2] \\
&= r_1r_2[(\cos A_1\cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2) + i(\cos A_1\sin A_2 + \sin A_1 \cos A_2)]
\end{aligned}
$$

Didapat

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos A_1+A_2)+ i \sin(A_1+A_2)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.3)$$

Nilai absolut dan argument persamaan (2.3) di atas adalah:

$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ .... (2.4)

dan arg (z_1z_2) = arg z_1 + arg z_2 .... (2.5)

- Bila dikenai operasi pembagian, yaitu

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos A_1 + i\sin A_1)}{r_1(\cos A_1 + i\sin A_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos A_1 + i\sin A_1)}{(\cos A_1 + i\sin A_2)}\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\left(\frac{(\cos A_1 + i\sin A_1)}{(\cos A_1 + i\sin A_2)}\right)\left(\frac{(\cos A_1 - i\sin A_1)}{(\cos A_1 - i\sin A_2)}\right)\right]$$

= ... selanjutnya menjadi **tugas mahasiswa 5** secara individu.

Hingga akhirnya didapat:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,[\cos(A_1 - A_2) + i\sin(A_1 - A_2)] \quad \text{.....................} \quad (2.6)$$

Nilai absolut dan argument persamaan (2.6) adalah:

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, dengan syarat $z_2 \neq 0$ .... (2.7)

dan arg $\frac{z_1}{z_2}$ = arg z_1 – arg z_2 .... (2.8)

Contoh masalah 4

1. Nyatakan

   dalam bentuk polar (kutub) z = r(c0s A + i sin A), dari:

   Z = 1 + i

Solusi;

diketahui x = 1 dan y = 1. maka

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

dan Arg z = A

$$= \arctan \frac{1}{1}$$

$$= 45^o = \frac{\pi}{4}.$$

Sehingga z = 1 + i, dapat ditulis dalam bentuk polar menjadi

$$Z = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

2. Tentukan argumen dari

   z = - π - π i

Solusi;

diketahui x = - π , dan y = π

Maka arg z = arctan $\frac{y}{x}$

$= \arctan \frac{-\pi}{-\pi}$

$= \arctan 1$

$= 225^{o} = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$

3. Nyatakan dalam bentuk z = x + iy untuk;

Z = $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Solusi:

x = $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 3\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3$

Dan y = $\sqrt{18}\left(i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ i = 3i .

Sehingga z = $\sqrt{18}\left(-\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

dapat direpresentasikan sebagai;

z = -3 + 3i

Soal latihan 2

1. Nyatakan dalam bentuk polar z = r(cosA +isinA), dari:

   a. 3 + i d. $\frac{-1-i}{3+i}$

   b. 1 + i$\sqrt{3}$ e. $\left(\frac{2+3i}{4-i}\right)^2$

   c. 1 – i

2. Tentukan argument dari:

   a. -1 + I c. 5 ± 2i

   b. -3 - i$\sqrt{3}$

3. Nyatakan dalam bentuk z = x + iy untuk:

   a. 2(cos$\frac{\pi}{4}$ + isin$\frac{\pi}{4}$)

   b. $\sqrt{12}$ (cos$\frac{\pi}{6}$ + isin$\frac{\pi}{6}$)

   c. $\sqrt{12}$ (cos$\frac{5\pi}{6}$ + isin$\frac{5\pi}{6}$)

   d. 2(cos$\frac{\pi}{4}$ - isin$\frac{\pi}{4}$)

e. $2(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

f. $2(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})$

BAB III

BENTUK PANGKAT, AKAR,

LOGARITMA, DAN BARISAN/DERET

DARI BILANGAN KOMPLEKS

A. Bentuk Pangkat dari Bilangan Kompleks

Perhatikan kembali persamaan (2.3) dan (2.4) di atas, bila nilai $z_1=z_2=z$, maka secara induksi untuk n = 1,2,… akan didapat rumus:

$z^n = r^n$ (cos nA + isin nA) …………………….. (3.1)

Dan bila $|z|$ = r = 1, maka persamaan (3.1) menjadi rumus De Moivre:

$(\cos A + i\sin A)^n = \cos nA + \sin nA$ ……………. (3.2)

Contoh masalah 5

Tentukan nilai untuk z^n, dengan n = 2, 3, ...

Jika diketahui z = 3i

Solusi:

z = 3i, maka x = 0 dan y = 3

sehingga r = 9

$$\text{dan } \arg z = \arctan \frac{y}{x}$$

$$= \arctan \frac{3}{0}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Jadi z = 3i, dalam bentuk polar dapat ditulis sebagai z =

$3(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2})$.

Dan untuk z^2, berdasar persamaan (3.1) di atas akan didapat,

$z^2 = 3^2 (\cos 2(\frac{\pi}{2}) + i\sin 2(\frac{\pi}{2}))$.

$= 9 (\cos \pi + i\sin \pi)$

$= 9 (-1 + 0) = -9$

Tugas mahasiswa 6, lakukan investigasi untuk contoh 5

B. Bentuk Akar dari Bilangan Kompleks

Bentuk akar dari bilangan kompleks adalah :

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

Nilai-nilai akar sebanyak n buah nilai dari bentuk di atas dapat diperoleh dengan mengacu pada persamaan dalam bentuk polar berikut:

$z = r$ (Cos A + isin A) dan $w = R$ (cos B + isin B)

Sehingga bentuk $W^n = z$

menjadi:

$w^n = R^n(\cos nB + i\sin nB) = z = r(\cos A + i\sin A)$ ... (3.4)

Dengan mengambil nilai absolut pada kedua persamaan (3.4) didapat: $R^n = r$ sehingga $R = \sqrt[n]{r}$

Dan nilai-nilai argumennya adalah:

$nB = A + 2k\pi$, sehingga $B = \dfrac{A}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$

k adalah bilangan integer, yaitu: k = 0, 1, …, n-1

Dan untuk mendapatkan n buah nilai yang berbeda, digunakan persamaan (3.5) berikut:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{A+2k\pi}{n} + i\sin\frac{A+2k\pi}{n}) \text{ .... (3.5)}$$

Ke-n buah nilai tersebut terletak pada suatu lingkaran yang berjari-jari $\sqrt[n]{r}$ dengan pusat lingkaran terletak dititik asal dan membentuk suatu polygon beraturan bersisi n

Contoh masalah 6

Tentukan nilai akar ke-n dari $\sqrt[n]{i}$, bila n = 3

Solusi:

W = $\sqrt[n]{z}$ = $\sqrt[3]{i}$,

berarti z = 1, r = 1,

dan arg z = $\frac{\pi}{2}$

Sehingga dalam bentuk polar: z = i menjadi

Z = 1(cos $\frac{\pi}{2}$ + isin $\frac{\pi}{2}$) = (cos $\frac{\pi}{2}$ + isin $\frac{\pi}{2}$)

Kemudian,

W^n = z : W^3 = i, dan dari persamaan (3.4)

W^n = R^n(cos nB + isin nB) = r(cos A + isin A),

menjadi:

$W^3 = R^3(\cos 3B + i\sin 3B) = 1(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2})$,

dan $R^3=1$, $R=1$.

Selanjutnya sejalan persamaan (3.5), yaitu

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{A+2k\pi}{n} + i\sin \frac{A+2k\pi}{n})$$

dengan nilai untuk 3B,

$$3B = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$B = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)(\frac{1}{3})$$

$$= \frac{\pi + 4k\pi}{6}, \quad \text{dengan } k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Karena pangkat 3, berarti harus ditentukan;

W_1 untuk nilai k = 0,

W_2 untuk nilai k = 1, dan

W_3 untuk nilai k = 2

Sehingga didapat:

Untuk k = 0: $W_1 = 1(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Untuk k = 1: $W_2 = 1(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Untuk k = 2: $W_3 = 1(\cos \frac{9\pi}{6} + i\sin \frac{9\pi}{6}) = -i$

Soal latihan 3

Tentukan semua nilai akar berikut

1. $\sqrt[3]{1}$
2. $\sqrt[3]{-i}$
3. $\sqrt[3]{-1}$

C. Logaritma dan Pangkat Umum

Logaritma asli untuk z = x + iy = ln z, yang merupakan kebalikan fungsi eksponnensial.

$$w = \ln z \leftrightarrow e^w = z \; ; \; z \neq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.6)$$

$e^w \neq 0$; karena tidak mungkin z = 0

Jika $w = u + iv$ dan $z = re^{i\theta}$,

maka $e^w = e^{u+iv} = e^u.e^{iv} = r\,e^{i\theta}$

Jadi

$$e^u = r = |z| \rightarrow u = \ln r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.7)$$

$$v = \theta = \arg z$$

$$w = u + iv = \ln z \rightarrow \ln z = \ln r + i\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

$$(r = |z|, \theta = \arg z)$$

Nilai utama :

Ln z = ln IzI + i arg z

$$= \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg (x + iy) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.9)$$

Karena argumen z ditentukan oleh kelipan 2π , maka logaritma asli kompleks mempunyai nilai lain yang tak hingga banyaknya.

Nilai utama ln z. yaitu dari : $-\pi < \arg z \leq \pi$

Nilai-nilai lain : ln z = ln z ± 2nπi (n = 1, 2, …). Bagian nyata (real) sama, sedangkan bagian imajiner berbeda sebasar kelipatan 2π.

Sifat-sifat logaritma :

$$\text{Ln}\,(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.10)$$

$$\text{Ln}\,\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.11)$$

Contoh masalah 7

1. Tentukan semua nilai berikut:
   a. Ln 2
   b. Ln (3 + 2i)

   Solusi;

Untuk a. Gunakan persamaan untuk nilai-nilai lain,

sehingga, Ln 2 = Ln 2 ± 2nπi

$= 0,693 \pm 2n\pi i$

Untuk b. Di sini saudara harus hati-hati karena harus memperhatikan nilai utama atau persamaan (3.9)

Sehingga

$$\text{Ln } (3 + 2i) = \text{Ln } \sqrt{3^2 + 2^2} + (\text{arctg } \frac{2}{3})i \pm 2n\pi i$$

$$= \text{Ln } \sqrt{9+4} + i0,588 \pm 2n\pi i$$

$$= 1,282 + i(0,588 \pm 2n\pi i$$

2. Tentukan nilai utama Ln z, jika:

a. $z = \text{Ln } (-7)$ dan b $z = (1 - i)^2$

Sulusi; ingat persamaan (3.9)

Untuk a.

$$\text{Ln } (-7) = \text{Ln } 7 + i\pi$$

$$= 1,946 + 3,142i$$

Untuk b.

$$\text{Ln } (1 - i)^2 = 2 \text{ Ln } (1 - i)$$

$$= 2 \text{ Ln } \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$$

$$= 2 (0,347 - i\,0,785)$$

$$= 0,694 - i\,1,571$$

3. Jika z_1 = -i dan z_2 = -1, tentukanlah Ln (z_1z_2)

   Solusi;

$$\text{Ln}(z_1z_2) = \text{Ln } i = \text{Ln } 1 + i\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi i,\ \ n = 1,2, \ldots$$

$$= 0 + i\frac{\pi}{2} \pm 2n\pi i,\ \ n = 1,2, \ldots$$

D. Barisan Bilangan Kompleks

Barisan kompleks adalah bilangan kompleks yang diurutkan dengan suatu pola tertentu. Pada umumnya ditulis dalam bentuk:

$z_1, z_2, z_3, \ldots$ atau

$\{ z_1, z_2, z_3, \ldots \}$ atau secara singkat

$\{z_n\}$

Bilangan-bilangan z_1, z_2, z_3 di atas disebut sebagai suku-suku barisan. Suku z_n disebut sebagai suku umum,au suku ke-n barisan tersebut.

Teorema 3.1

Dua barisan $\{z_n\}$ dan $\{w_n\}$ dikatakan sama jika dan hanya jika suku-suku yang bersesuaian sama:

$z_n = w_n$ untuk semua n = 1, 2, 3, ...

contoh masalah 8

tentukan barisan $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$ dengan beberapa suku

pertamanya.

Solusi;

$\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$ = $\left\{i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-i}{7}, \frac{1}{8}, \frac{i}{9}, \ldots\right\}$

1. Barisan konvergen

Sebuah barisan bilangan kompleks atau sebuah barisan $\{z_n\}$ disebut konvergen jika terdapat suatu bilangan z sehingga

$\lim_{n\to\infty} z_n$ = z .... (3.12)

Contoh masalah 8 di atas merupakan contoh barisan yang konvergen karena barisan ini konvergen ke titik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$$

2. Barisan divergen

Dua ciri utama dari sebuah barisan yang divergen.

Ciri 1

Bila n bertambah besar maka suku-suku barisan tersebut bertambah besar nilai mutlaknya tanpa batas.

Contoh masalah 9

Tinjaulah barisan $\left\{ n - \frac{1}{n} \right\}$, nyatakan beberapa suku pertamanya, lalu tentukan apakah konvergen atau divergen.

Bila mengacu pada persamaan (3.12), benarkah akan diperoleh hasil limit $\lim_{n \to \infty} n - \frac{1}{n}$ = ∞ - 0 = ∞ .

Ini menjadi **tugas mahasiswa 7** secara individu..

Ciri 2

Jika suku-suku dari suatu barisan berisolasi di antara dua titik atau lebih maka barisan tersebut tergolong barisan konvergen.

Perhatikan barisan $\left\{ i^n \right\}$, akan memiliki suku-suku pertama {i, -1, i, -1, -i, 1, ...}

Barisan di atas meskipun suku-sukunya tidak makin besar menuju tak hingga, tetap tergolong barisan divergen, dan dinamakan divergen terbatas (bounded divergent).

Seperti yang nampak bahwa suku-sukunya terisolasi di titik i, -1, -i, dan 1.

Soal latihan 4

1. Jika z_1 = -i dan z_2 = -1, tentukanlah Ln $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$
2. Tentukan nilai utama Ln z, jika:
   a. Z = $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
   b. Z = 3 + $i\sqrt{27}$
3. Tentukan semua nilai berikut:
   a. Ln (-5)
   b. Ln (ℓ^{2i})
   c. Ln $\left(\frac{-i}{3}\right)$
   d. Ln ($\frac{1}{4}$ + 5i)
   e. Ln (π - i)
4. Pecahkan persamaan berikut untuk z:
   a. Ln z = - $\frac{\pi i}{2}$
   b. Ln z = -2 - $\frac{3}{2}$ i

c. Ln z = 3 – i

d. Ln z = ℓ - π i

5. Tentukan nilai utama dari:

a. $I^{1/2}$ c. $(1 + i)^{i - 1}$

b. $(2i)^{2i}$ d. $(3 + 4i)^{1/3}$

6. Tulislah beberapa suku pertama dari barisan berikut dan tentukanlah apakah barisan tersebut konvergen atau divergen.

a. $\{92i)\}^n$ d. $\left\{\frac{2n-i}{n+2i}\right\}$

b. $\{2i^n\}$

c. $\left\{\frac{1}{n(1-i)^n}\right\}$

BAB IV
FUNGSI KOMPLEKS
FUNGSI EKSPONEN
FUNGSI TRIGONOMETRIK
DAN FUNGSI HIPERBOLIK

A. Fungsi Kompleks

Didefinisikan bahwa : S adalah himpunan bilangan kompleks , dan fungsi f pada S adalah aturan yang menetapkan setiap z di dalam S suatu bilangan kompleks w, yang disebut sebagai nilai fungsi f di z, ditulis:

$$w = f(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.1)$$

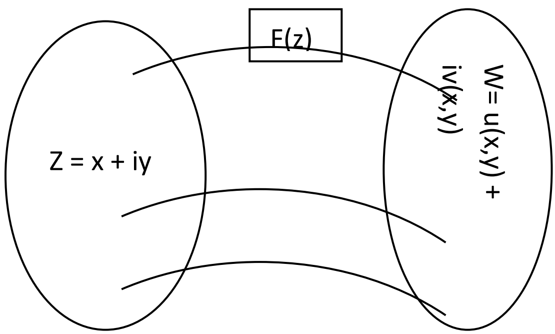
Pada persamaan (4.1) di atas, z merupakan peubah kompleks (complex variabel), dan S merupakan domain dari definisi fungsi f.

Himpunan seluruh nilai fungsi f disebut sebagai jangkauan (range) dari f. sementara w juga bilangan kompleks, dan dapat ditulis sebagai : $w = u + iv$. Dengan u merupakan bagian nyata dan v merupakan bagian imajiner. Jadi w bergantung pada $z = x + iy$.

W = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) ………………………… (4.2)

Rumusan pada persamaan (4.2) di atas menunjukan bahwa fungsi komplkes f(z) ekuivalen dengan pasangan fungsi u(x,y) dan v(x,y) yang keduanya bergantung pada dua peubah x dan y.

Secara geometris (pada bidang kompleks) dapat dijelaskan seperti gambar berikut:



Domain fungsi tujuan/hasil fungsi

Gambar 4.1
Pemetaan Fungsi Kompleks

B. Fungsi Eksponen dari Bilangan Kompleks

Notasi : e^z , juga ditulis : exp z

$e^z = e^x$ (cosy + i sin y) = e^{x+iy} = $e^x . E^{iy}$ .... (4.3)

Dan ditulis dalam deret Mac Laurin :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad \text{..........} \quad (4.4)$$

e^z analitik untuk seluruh z

Turunannya :

$(e^z)^1 = e^z$ .... (4.5)

Bukti :

z = x + iy

= e^x cosy + ie^x siny maka

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y)$$

= e^x cos y + i e^x sin y

= e^x (cos y + I sin y) = e^z

Relasi fungsional :

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} . e^{z_2} \quad \text{.......................} \quad (4.6)$$

Bukti :

$z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$

$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{x_1}$ (cos y_1+$i$sin y_1). e^{z_2} (cos y_2+$i$sin y_2)

$= e^{x_1}\, e^{z_2}$ (cos (y_1+y_2) + *i*sin (y_1+y_2))

$= e^{x_1+x_2}$ (cos (y_1+y_2) + *i*sin (y_1+y_2))

$= e^{z_1+z_2}$

Jika $z_1 = x$, $z_2 = iy$, maka

$e^z = e^x.e^{iy}$

$= e^x(\cos y + i\sin y)$

Sehingga didapat

e^{iy} = (cos y + *i*sin y) .... (Rumus Euler).(4.7)

Bentuk polar : z : r (cosθ + *i* sinθ) = $r.e^{i\theta}$ = r$\angle\theta$

$\left|e^{iy}\right| = \left|\cos y + i\sin y\right| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$

Jadi :

$\left|e^{z}\right| = e^x$, arg $e^z = y \pm 2n\pi$ (n = 0, 1, 2, …) ….. (4.8)

Karena

$\left|e^{z}\right| = e^x$ menunjukan e^z dalam bentuk polar

Dari $\left|e^{z}\right| = e^x \neq 0$ maka $e^z \neq 0$

Keperiodikan e^z dengan periode sebesar $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$

Daerah pundamental unruk e^z : $-\pi < y \leq \pi$ .... (4.9)

Contoh masalah 10

1. Hitunglah e^z (dalam bentuk u + *i*v) dan $\left|e^z\right|$ bila :

   Z = 1 + π*i*

   Solusi : (perhatikan kembali persamaan (4.3))

   $e^{1+\pi i} = e(\cos\ \pi + i\sin\pi)$

   $= e\cos\pi + ie\sin\pi$

   $= e(-1) + i\ 0$

   $= -2{,}7183$

   Dan $\left|e^z\right|$ = 2,7183

2. Tentukan semua solusi dari : $e^z = \sqrt{3} - i$

   Solusi : dari $e^z = \sqrt{3} - i$, didapat

   $e^x \cos y = \sqrt{3}$, dan $e^x \sin y = -1$

   $\cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{e^x} = 0{,}306$, dan $\sin y = \dfrac{-1}{e^x} = -0{,}1769$

   sehingga $\tan y = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow y = 330^0$

   berarti: $e^x \cos 330^0$. Dan

   $e^x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ atau

$e^{x} = \sqrt{3}\ .\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ = 2 maka

x = ln 2 = 0,693

jadi $e^{z} = \sqrt{3}$ - i = $e^{0,693 + I\,330}$

$= \ e^{0,693+i.\frac{4\pi}{6}}$

Soal latihan 5

1. Hitunglah e^{z} (dalam bentuk u + iv) dan $\left|e^{z}\right|$ bila :
   a. Z = 3 + πi
   b. d. z = -I
   c. $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{3}{2}i$
   d. e. z = e + 5πi
   e. -2 - 3πi

   f. z = $\dfrac{9\pi i}{2}$

   g. z = -1 = $\dfrac{7\pi i}{4}$

   h. z = π - $\dfrac{i}{2}$
2. Tentukan semua solusi dari :
   a. e^{z} = -3 + 4i
   b. e^{z} = i
   c. e^{2z} = -2

C. Fungsi Trigonometrik dan Fungsi Hiperbolik

Dari rumus Euler :

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i\sin x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \cos x &= \tfrac{1}{2}\,(e^{ix} + e^{-ix}) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\,(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

maka :

$$\cos z = \tfrac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.10)$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.11)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad ;$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \rightarrow \cos z \neq 0$$

$$\text{cotg } z = \frac{\cos z}{\sin z} \qquad ;$$

$$\text{cosec } z = \frac{1}{\sin z} \rightarrow \sin z \neq 0$$

turunan : $(\cos z)' = -\sin z$

$(\sin z)' = \cos z$

$(\tan z)' = \sec^2 z$

Rumus Euler berlaku untuk semua bilangan kompleks
:

e^{iz} = cos z + i sin z

untuk semua z

Cos z = cos x cosh y + i cos x sinh y .... (4.12)

Cosh y = ½ ($e^y + e^{-y}$)

Sinh y = $\frac{1}{2}$ ($e^y - e^{-y}$)

Sin z = sinx cosh y + i cos x sinh y .... (4.13)

Jika $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y \rightarrow \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, maka :

$|\cos z|^2 = \cos^2 x(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y$

Dan karena $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

maka :

$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$ .... (4.14)

$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ .... (4.15)

Rumus-rumus lain yang perlu diingat :

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ ..... (4.16)

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \text{con } z_1 \sin z_2$ .... (4.17)

$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .... (4.18)

Fungsi-fungsi hiperbolik :

cosh z =½ ($e^z + e^{-z}$) .... (4.19) sinh z = ½ ($e^{z} + e^{-z}$) .... (4.20)

Turunan :

(cosh z)’ = sinh z .... (4.21)

(sinh z)’ = cosh z .... (4.22)

Definisi :

Tanh z = $\dfrac{\sinh z}{\cosh z}$ .... (4.23)

coth z = $\dfrac{\cosh z}{\sinh z}$

Sech z = $\dfrac{1}{\cosh z}$ .... (4.25)

Csch z = $\dfrac{1}{\sinh z}$ .... (4.26)

Fungsi Trigonometrik dan hiperbolik

Cosh iz = cos z .... (4.27)

Sinh iz = I sin z .... (4.28)

Cos iz = cos z .... (4.29)

Sin iz = I sinh z .... (4.30)

Contoh masalah 11

1. Turunan fungsi cos $\left(\dfrac{1}{z^{2}}\right)$ adalah ....?

Solusi :

turunan dari cos $\left(\frac{1}{z^2}\right)$ = sin $\left(\frac{1}{z^2}\right)$ d(z^{-2})

$$= -2z^{-3} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{2}{z^3} \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

2. Hitung dalam bentuk u + iv untuk cos (1 + 3i)

Solusi :

cos x cosh y – i sin x sinh y

Cos (1 + 3i) =

cos 1 cosh 3 - i sin 1 sinh 3 … (casio Fx 3650P, mode deg)

= 0,99985 . 10,0677 - i 0,01745 . 10,01787

= 10,066 - i . 0,1748

3. Solusi untuk sinh (z) = 1 adalah … ?

Solusi :

Karena sinh (z) = ½ ($e^z - e^{-z}$), maka :

½ ($e^z - e^{-z}$) = 1 → $e^z - e^{-z}$ = 2

(e^z)

$e^{2z} - 1 = 2e^z$

$e^{2z} - 2e^z - 1 = 0$

$e^z = (2 \pm \sqrt{8})/2$

$$e^z = 2,4142$$

$$z = \ln(2,4142)$$

$$= 0,881$$

Soal latihan 6

1. Diferensialkan fungsi-fungsi berikut ini :
   a. Sin (z^{-1})
   b. Cos (z^3)
   c. Sin $(z^{(-1/2)})$
   d. cosh ^{2} $(\pi z))$
   e. sinh (z^2)
2. Hitunglah dalam bentuk u + iv :
   a. Cos (2 + i)
   b. d. Cos (3 + 2i)
   c. Sin (2 + i)
   d. Cosh (2πi)
   e. Sin (3 + 2i)
3. Carilah solusi untuk persaman berikut :
   a. Sin (z) = 0
   b. Sin (z) = i
   c. Cos (z) = 2i
   d. sinh (z) = 0

BAB V

LIMIT DAN FUNGSI ANALITIK

A. Limit

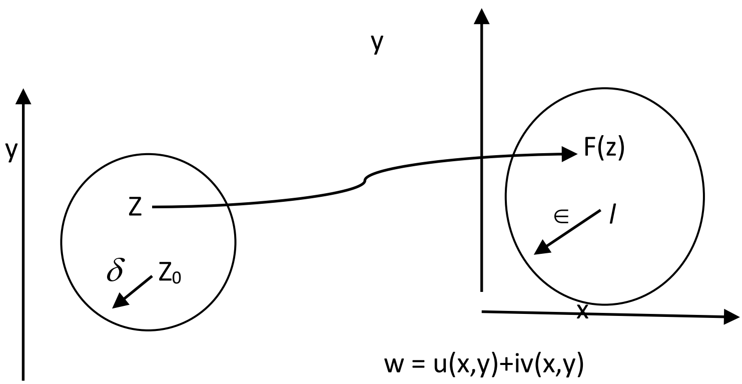
Suatu fungsi f(z) dikatakan mempunyai limit *l* untuk z mendekati titik z_0, di tulis:

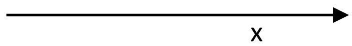
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \quad \text{...} \quad (5.1)$$

Jika nilai f dekat ke *l* untuk semua z dekat ke z_0, untuk setiap bilangan nyata positif $\in$, dapat ditemukan bilangan nyata positif δ sedemikian rupa sehingga untuk semua $z \neq z_0$ di dalam cakram $|z - z_0| < \delta$; didapatkan :

$$|f(z) - l| < \in \quad \text{.......................................} \quad (5.2)$$

Untuk setiap $z \neq z_0$ di dalam cakram δ , nilai f terletak dalam cakram.





z = x +iy

Gambar 5.1. Limit

Fungsi f(z) dikatakan kontinu di $z = z_0$ jika $f(z_0)$ terdefinisikan dan

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad \text{.....................................} \quad (5..3)$$

Turunan dari fungsi kompleks f pada titik z_0 ditulis $f'(z_0)$ dan didefinisikan sebagai:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \text{.......................} \quad (5.4)$$

Selanjutnya f dikatakan dapat diturunkan di z_0, jika $\Delta z = z - z_0$, atau $z = z_0 + \Delta z$, maka:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{............................} \quad (5.5)$$

B. Fungsi Analitik

Fungsi f(z) dikatakan analitik disuatu domain D jika f(z) terdefinisi dan dapat diturunkan pada setiap titik dari D. Fungsi f(z) analitik pada titik $z = z_0$ di D jika f(z) analitik di dalam lingkungan dari z_0.

Jadi keanalitikan f(z) di z_0 berarti bahwa f(z) mempunyai turunan pada setiap titik di dalam suatu lingkungan dari z_0 (termasuk z_0 sendiri)

1. Persamaan Cauchy-Riemann

Suatu fungsi kompleks f(z) = u(x,y) + iv(x,y); maka f analitik dalam domain D, jika dan hanya jika turunan parsial pertama dari u, dan v memenuhi persamaan Cauchy-Riemann:

$u_x = v_y$ dan $u_y - v_x$ atau dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.6)$$

Dalam bentuk kutub bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dan fungsi $w = f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, maka persamaan Cauchy-Riemann menjadi :

$U_r = \frac{1}{r}v_\theta$ dan $v_r = \frac{1}{r}u_\theta$ atau dapat ditulis:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.7)$$

2. Persamaan Laplace

Bagian nyata dan bagian imajiner dari fungsi kompleks f(z) = u(x,y) + iv(x,y) yang analitik dalam domain D memenuhi persamaan Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^{`2} u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dan } \nabla^2 v = \frac{\partial^{`2} v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ldots$$

(5.8)

dan mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu dalan D

3. Fungsi Harmonik

Penyelesaian persamaan Laplace yang mempunyai turunan parsial ordo - kedua kontinu disebut sebagai fungsi harmonik.

Jika dua fungsi harmonik u(x,y) dan v(x,y) memenuhi persamaan Cauchy-Riemann dalam domain D , maka jika u dan v adalah bagian nyata dan bagian imajiner suatu fungsi analitik f(z) dalam domain D, maka v(x,y) disebut fungsi harmonik konjugat dari u(x,y) dalam domain D.

Contoh masalah 12

1. Buktikan fungsi f(z) = z^3 analitik

solusi:

$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Didapat; $u = x^3 - 3xy^2$ dan $v = 3x^2y - y^3$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

dan

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$$

Nampak benar bahwa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

dan $$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Artinya persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi.

Jadi $f(z) = z^3$ analitik.

2. Tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ bila diketahui $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

Solusi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3-12xy^2 \quad \text{.......................} \quad 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y+4y^3 \quad \text{...................} \quad 2)$$

1) ... $\frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3-12xy^2$,

maka v $= 4x^3y-4xy^3+h(x)$

sehingga didapat

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y -4y^3 + \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad \text{........} \quad 3)$$

Memperhatikan hubungan 2) dan 3),

maka didapat $\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 0$,

jadi $h(x) = c$

Berarti $v = 4x^3y-4xy^3+ c$

Fungsi analitik $f(z) = u(x,y) +iv(x,y)$

$f(z) = (x^4 - 6x^2y^2+y^4) + i(4x^3y-4xy^3+ c)$

$f(z) = x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 + ic$

$f(z) = (x +iy)^4 + ic$

$f(z) = z^4 + ic$

soal latihan 7

1. Buktikan fungsi-fungsi di bawah ini analitik:
   a. $f(z) = z^4$
   b. $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$
   c. $f(z) = (1 + i)z^2$
2. tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, apabila diketahui:
   a. $u = x^2 - y^2 - y$
   b. $v = e^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$
3. Apabila fungsi-fungsi berikut harmonik, tentukan fungsi analitiknya:
   a. $U = y^2 - x^2$
   b. $U = xy$
   c. $V = \ell^{x^2 - y^2} \sin(2xy)$
   d. $U = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

Daftar Rujukan

K.A. Stroud & Dexter, *Engineering Mathematics,* Palgrave, 5th Edition, 2001

Ruel V.Churchill & James, *Complex Variables n Applications*, McGraw Hill, 5th Edition, 1990