**BAB I**

**PENDAHULUAN**

 Teori bilangan (*number theory*) adalah teori yang mendasar dalam memahami algoritma operasi bilangan. Bilangan yang dimaksudkan ‘bilangan bulat (*integer*)’.

 Buku ini ditulis mengacu pada silabus/satuan acara perkuliahan (pada lampiran), mengindahkan pemahaman karakteristik Mahasiswa program studi pendidikan matematika IKIP Siliwangi Bandung/perguruan tinggi swasta pada umumnya. Alasan di atas sejalan petunjuk dari pengampu mata kuliah ‘Prof Dr Wahyudin M.Pd.’ (Februari 2012).

 Revisi pertama dilakukan (Februari 2013), sejalan petunjuk Dr. H Asep Ikin sugandi M.Pd. Dan revisi ke-dua dilakukan pada Februari 2015 memenuhi tuntutan yang berubah secara dinamis sejalan waktu.

 Buku ini hampir berupa *book report* dari sebagian chapter yang ada dari Burton. 1980. *Elementary Number Teori*. Boston, Allyn and Bacon, Inc. Tambahan dan penyederhanaan berupa kompilasi rujukan yang sejalan dengan tujuan perkuliahan.

 Dengan selesainya buku ini, diharapkan perkulihan dapat menghantar setiap pembelajar (mahasiswa) hingga sampai pada kompetensi yang diharapkan sebagai calon profesional dibidang pendidikan matematika.

 Sajian buku ini diawali pendahuluan yang berupa apersepsi. Selanjutnya bab ke-2 tentang bilangan; dimulai dengan operasi hitung dalam matematika, dilanjutkan dengan ragam operasi bilangan bulat hingga sifat medan ketertutupan dan urutan. Bab ke-3 tentang: pola bilangan, bilangan jam bilangan non desimal, bujur sangkar ajaib, dan diakhiri dengan induksi matematis.

 Dengan semesta pembicaraan adalah bilangan bulat, bab berikutnya disajikan.

 Bab ke-4 tentang; sifat pembagian pada bilangan bulat, pembagi bersama terbesar (PBB) atau *greatest common divisor* (GCD) atau faktor persekutuan terbesar (FPB), dan algoritma euclidean. Tentang; relatif prim, modulo, kongruen dan kongruen lanjar. Tentang; fungsi Euler dan persamaan Diopthantine. Tentang; bilangan prima hingga bilangan palindrome.

 Diakhir tiap bab dan sub bab, disajikan contoh soal dan selesaiannya hingga syarat cukup. Kemudian soal latihan sederhana hingga sedikit lebih sulit yang ditulis dalam bahasa Indonesia dari soal-soal yang dipilih dari buku sumber dan hasil analisis penulis.

 Kemudian ditambah dengan satu atau lebih soal yang langsung dikutip dari buku sumber tanpa diterjemahkan. Diantaranya sengaja ada soal yang sama (setelah diterjemahkan)di soal latihan yang berbeda. Maksud memberi stimulus kemampuan bilingual mahasiswa.

 Urutan sajian dalam penulisan, tidak berarti sebagai urutan materi perkuliahan. Dalam hal ini sajian materi di setiap perkuliahan fleksibel mengacu pada keberadaan mahasiswa yang berkembang dalam kondisi perkuliahan yang selalu nampak dinamis, dengan tetap memperhatikan karakteristik matematika dan pencapaian tujuan perkuliahan.

 Sajian materi dalam perkuliahan nampaknya akan didominasi dengan Pendekatan deduktif/induktif dan atau Pembelajaran Berbasis Masalah (PBL) dengan seting Penugasan, Tanya jawab. Sehingga bagi mahasiswa akan nampak lebih menguntungkan bila memahami atau mempelajari buku ini terurut sesuai urutan sajian. Kemudian bila dirasakan muncul permasalahan dan tidak dimengerti atau sulit difahami dapat menjadi bahan pembicaraan dalam perkuliahan.

**BAB II**

**BILANGAN**

 Bilangan dapat bermakna sebagai subjek juga objek dalam matematika, yang kemudian dikenai sistem operasi hitung (aritmetika) atau operasi khusus baik dalam sistem uner maupun binar. Karenanya berkembanglah proposisi-proposisi teorema yang merupakan jabaran dari definisi.

 Eksistensi dari proposisi sampai definisi atau sebaliknya bersifat konsisten. Dan hal inilah yang menyebabkan matematika dikenal sebagai ilmu yang konsisten dan terstruktur. Keberadaannya tersebut sangat mendasari dalam cara memahami matematika, baik dalam konteks mempelajarinya juga mengajarkannya.

1. **Bilangan dan Operasi Hitung dalam Matematika**

 Bilangan yang menyatakan banyaknya anggota suatu himpunan, dikenal sebagai bilangan kardinal. Dan bilangan yang menunjukan urutan misalnya; kesatu, kedua, dan seterusnya disebut sebagai bilangan ordinal.

 Dalam matematika, operasi diartikan sebagai

“pengerjaan”. Operasi dimaksud adalah operasi hitung atau pengerjaan hitung, yang pada dasarnya mencakup empat pengerjaan dasar, yaitu: penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian yang dapat dikenakan pada setiap himpunan bilangan.

 Empat operasi hitung yang dikenakan pada dua bilangan, dijelaskan sebagai berikut;

Ambil sembarang dua bilangan riil x dan y. Atasnya kita dapat menambahkan atau mengalikan keduanya untuk memperoleh bilangan riil baru x + y dan
x . y atau cukup ditulis dengan xy.

Sementara pengurangan dan pembagian didefinisikan

dengan: x – y = x + (-y)

 x : y atau  = x . y-1

1. **Sistem dan Operasi Binar**

 Sistem binar atau sistem biner atau sistem bilangan dengan dasar dua, pada sistem binar ini hanya menggunakan dua angka saja yaitu 0 dan 1.

 Dan operasi biner adalah operasi yang menghubungkan sepasang bilangan dengan tepat kesatu bilangan. Maksudnya, setiap operasi hanya ada dua unsur yang dapat diselesaikan. Dan bila ada tiga unsur, dua unsur dikerjakan lebih dahulu, baru kemudian dikerjakan unsur ketiga.

 Definisi operasi biner

 Jika S adalah suatu himpunan yang tidak kosong maka operasi biner o (dibaca “bundaran”) pada S adalah suatu pemetaan (fungsi) yang mengawankan setiap pasangan berurutan. (a,b) є S x S dengan tepat satu elemen
(a o b) є S. secara simbolik definisi ini, yaitu operasi biner bundaran ditulis:

**o : S x S → S**

 Misalkan Q adalah bilangan rasional. Untuk semua a dan b anggota Q maka (a + b) є Q, (b + a) є Q, (a x b) є Q,
(b x a) є Q, (a – b) є Q, (b – a) є Q. Penjumlahan, pengurangan, perkalian tersebut merupakan contoh-contoh operasi biner pada Q.

1. **skema himpunan bilangan**

 Himpunan bilangan-bilangan, secara lebih rinci dijelaskan dalam bentuk diagram 1. Terurut dari atas sebagai himpunan semesta (bilangan komplek) dan ke bawah berupa himpunan-himpunan bagiannya. Sehingga, himpunan bilangan real dan bilangan khayal merupakan himpunan bagian dari himpunan bilangan khayal, ..., dan seterusnya .

**Bilangan Kompleks**

**Bilangan Khayal** (Imajiner)

**Bilangan Real**

**Bilangan Rsional**

**Bilangan Irasional**

Pec Positif

Pec Negatif

**Bilangan Bulat**

**Bilangan Pecahan**

**Bil Bulat Negtif**

(**lawan bil Asli**)

**Bilangan Cacah**

**Bilangan Asli**

**Bilangan Nol**

**Bil Ganjil**

**Bil Prima**

**Bil Komposit**

**Bil Genap**

Diagram 1

Macam-macam bilangan

dan hubungannya satu dengan lainnya.

 Berikut dijelaskan secara sepintas dari beberapa bilangan dimaksud di atas.

 **Bilangan asli** adalah bilangan-bilangan seperti 1, 2, 3, 4, … . jadi himpunan bilangan asli adalah {1, 2, 3, 4, … }.

 Ada 4 golongan bilangan asli yaitu:

Bilangan genap : 2, 4, 6, 8, …

Bilangan ganjil : 1, 3, 5, 7, …

Bilangan prima : 2, 3, 5, 7, 11, …

Bilangan komposit, misalnya 4, 6, 8, 10, … .

 Bilangan asli biasanya dilabangkan dengan huruf N. Dan gabungan N dengan bilangan nol disebut sebagai bilangan cacah.

 **Bilangan Rasional** terdiri dari: himpunan pecahan negatif dan positif, bilangan nol, himpunan bilangan bulat negatif dan himpunan bilangan bulat positif.

 Bilangan bulat hakekatnya adalah pecahan positif dan atau pecahan negatif.

Contoh 1: 2 = bilangan asli

 = bilangan bulat positif

 = juga pecahan positif, sebab 2 = 

 -2 = lawan bilangan asli

 = bilangan bulat negatif

 = juga pecahan negatif, sebab -2 = -

 Dan bilangan-bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai bilangan pecahan atau bilangan yang bukan bilangan rasional dikenal sebagai himpunan bilangan irasional. Bilangan-bilangan di bawah tanda akar adalah anggota dari himpunan bilangan irasional.

 **Bilangan imajiner**. Imajiner aslinya ditulis *imaginair*, diterjemahkan dengan khayal. Bilangan imajiner disebut juga bilangan khayal, adalah bilangan bulat negatif di bawah tanda akar.

Contoh 2: , , , -*i*

Bilangan imajiner didefinisikan sebagai berikut:

 *i* = , *i*2 = -*i*2 = -1

 jadi 2 = 2*i* dan sebagainya, dengan
 *i* menyatakan satuan imajiner.

 **Bilangan kompleks**. Adalah bilangan yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan, selisih atau hasil kali antara bilangan riil dengan bilangan imajiner. Misalnya bila a, dan b bilangan riil, maka bentuk a + bi disebut bilangan kompleks.

 Perhatikan, dalam bentuk a + bi, bila a = 0, maka bentuk ini adalah bilangan imajiner. Dan bila b = 0, maka bentuk ini menjadi bilangan riil.

 **Bilangan prima**. Dulu dinamakan bilangan basit. Pengertian bilangan prima dapat dijelaskan sebagai berikut: 3 x 4 = 12.

 Bilangan 3 dan 4 disebut faktor-faktor dari 12. Selain 3 dan 4 masih ada bilangan-bilangan lain yang juga menjadi faktor 12. Bilangan itu adalah: 1, 2, 6, 12. Jadi himpunan faktor –faktor 12 adalah: {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

Semua bilangan asli apabila diuraikan, faktor-faktornya dan akan nampak seperti pada daftar berikut:

Bil. Asli : himpunan faktor-faktornya

 1 : {1}

 2 : {1, 2}

 3 : {1, 3}

 4 : {1, 2, 4}

 5 : {1, 5}

 6 : {1, 2, 3, 6}

 Dan seterusnya.

 Dari daftar di atas nampak bahwa bilangan 1 mempunyai tepat satu faktor. Bilangan 2, 3, 5 tepat mempunyai dua faktor. Bilangan asli lainnya mempunyai lebih dari dua faktor.

 Jadi yang dimaksud bilangan prima adalah bilangan asli yang mempunyai tepat dua faktor, yaitu bilangan 1

dan dirinya sendiri.

 Mengurutkan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu disebut barisan bilangan.

Contoh 3:

1. 1, 3, 5, 7, … . Satu disebut suku pertama, 5 suku ke tiga dst. Aturan pada barisan bilangan ini adalah “lebih 2”.
2. 1, 3, 6, 10, 15, 21, … . perhatikan bahwa dari pola ini dapat disusun barisan bilangan sebagai berikut:

1 = 1

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = 1 + 2 + 3 + 4

15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5

.

.

.

Un = 1 + 2 + 3 + … + n-1 + n = [n(n +1)]/2

1. **Sifat Medan dan Ketetutupan**

 Penambahan dan perkalian mempunyai sifat-sifat yang dikenal sebagai sifat-sifat medan. Dan dijelaskan berikut.

|  |
| --- |
| Sifat-sifat Medan1. Hk komutatif. x+y = y+x dan xy = yx
2. Hk assosiatif. x+(y+z) = (x+y)+z dan x(yz) = (xy)z
3. Hk distributive. x(y+z) = xy +xz
4. Elemen-elemen identitas. Terdapat dua bilangan riil 0 dan 1 yang memenuhi x + 0 = x dan x . 1 = x
5. Balikan (invers). Setiap bilangan x mempunyai balikan aditif (disebut juga sebuah negative), -x, yang memenuhi x + (-x) = 0. Juga setiap x kecuali 0 mempunyai balikan perkalian (disebut juga kebalikan)x-1, yang memenuhi x . x-1 = 1
 |

Penjelasan.

Berikut beberapa Sifat distributif:

1. Pembagian terhadap penjumlahan

Bila a, b, c anggota bilangan cacah dan c faktor dari a dan b maka;

(a + b) : c = (a : c) + (b : c) =  + 

1. Pembagian terhadap pengurangan

(a - b) : c = (a : c) - (b : c) =  - 

1. Perpangkatan terhadap perkalian

(a x b )c = ac x bc

1. Penarikan akar terhadap perkalian

 =  x 

1. Penarikan akar terhadap pembagian

  =  : 

 **Sifat ketertutupan** dijelaskan dengan masalah sebagai berikut, “Apakah operasi penjumlahan bersifat tertutup pada bilangan asli genap?”

Solusi menemukan kejelasan sebagai berikut:

 Misal A = {2, 4, 6, 8, …} yaitu himpunan bilangan asli genap dan pandang operasi +, yaitu operasi penjumlahan seperti yang telah kita kenal. Maka + merupakan operasi biner pada A, sebab jumlah setiap bilangan asli genap selalu merupakan bilangan asli genap dalam A. sehingga didapat simpulan bahwa himpunan bilangan asli genap tertutup terhadap penjumlahan.

1. **Sifat Urutan**

 Urutan bilangan bila dinyatakan pada garis bilangan, misalnya untuk sebarang dua bilangan riil x dan y. jika dikatakan x < y berarti x berada disebelah kiri y pada garis bilangan riil tersebut.

 x < y ↔ y – x positif

 ungkapan geometrik < dijelaskan berdasar sifat-sifat urutan secara singkat dijelaskan dalam kotak berikut.

|  |
| --- |
| Sifat-sifat urutan1. Trikotomi. Jika x dan y bilangan-bilangan, maka pasti satu diantara yang berikut berlaku;

 x < y atau x = y atau x < y1. Ketransitifan. x< y dan y < z → x < z
2. Penambahan. X < y ↔ x + z < y + z
3. Perkalian. Bilangan z positif, x < y ↔ xz < yz. Bilamana z negative, x < y ↔ xz › yz
 |

Soal Latihan 1

1. Tentukan bilangan kardinal untuk himpunan bilangan prima yang kurang dari 52
2. Buat masing-masing 5 masalah yang berkaitan dengan konsep yang dijelaskan di atas. Kemudian tentukan selesaiannya.

Contoh: 1) apa yang dimaksud dengan operasi biner, jelaskan. 2) apakah operasi penjumlahan pada bilangan ganjil merupakan operasi biner? Lalu kemukakan solusinya, dan bila soal atau masalah tersebut adalah kutipan maka sertakan sumbernya.

**BAB III**

**BILANGAN DESIMAL**

**DAN BILANGAN NON DESIMAL**

 Bilangan desimal adalah bilangan yang kita kenal dalam keseharian. Misalnya kita katakan 2, 3, 11, 23,… dan seterusnya. Demikian pula bila kita operasikan, misalnya 9 + 3 = 12, dalam hal ini kita sedang bicara dalam konteks bilangan desimal.

 Sedangkan bilangan non desimal dapat berupa bilangan jam 4-an, 5-an, dan lain-lain, dan basis atau bilangan dasar yang bukan 10-an. Misalkan untuk masalah keseharian kita, kita katakan jam tiga belas. Dalam jam dua belasan kita katakan sebagai jam satu.

 Pemisalan lain, kita katakan bahwa :

5 + 6 = 11 (dibaca lima ditambah enam adalah satu satu atau sebelas dalam konteks bilangan desimal).

Akan benar juga bila kita katakan bahwa 5 + 6 = 13 (dibaca lima ditambah enam adalah satu tiga dalam bilangan non desimal, yang dalam hal ini bilangan dasar delapan). Dan seterusnya.

 Kajian pembagian pada bilangan desimal, sekilas disajikan dalam beberapa penjelasan pada tabel berikut:

Penguji Pembagian

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| pembagi | Penguji | contoh |
| 2 | Suatu bilanga habis dibagi 2, bila angka-angka terakhir dari bilangan itu genap atau nol | 1284 hadib 21480 hadib 2 |
| 3 | Habis bibagi 3, bila jumlah angkanya habis diibagi 3 | 32493 hadib 3 |
| 4 | Habis dibagi 4, bila dua angka terakhir habis dibagi 4 | 6828 hdib 4 |
| 5 | Habis dibagi 5, bila angka terakhir suatu bilangan adalah 5 atau 0 | 42345 hadib 57120 hadib 5 |
| 6 | Habis dibagi 6, bila jumlah angka bilangan itu habis dibagi dengan 2 dan 3 | 1524 hadib 6 |
| 8 | Habis dibagi 8 bila tiga angka terakhir dapat habis dibagi 8 | 7240 hadib 8 |
| 9 | Habis dibagi 9 bila jumlah angkanya habis dibagi 9 | 3276 hadib 9 |

Kajian untuk bilangan jam dan basis.

Sebagai gambaran awal perhatikan dan telaah

penjelasan berikut.

Pada saat kita bilang seratus ribu rupiah, 60 km/jam, jam 24.00 wib, kita mengatakannya berdasar pemahaman kita tentang bilangan dasar sepuluhan atau desimal dan bukan jam duabelasan yang telah familiar dalam keseharian kita. Sehingga kalau ada yang mengatakan sebagai jam 14, hal ini menjadi benar karena kita dan yang bersangkutan juga biasa berpikir tentang jam dalam bilangan dengan basis sepuluhan.

Berikut penjelasan melalui beberapa contoh.

Contoh 1:

Perhatikan S = {0, 1, 2, 3} yaitu himpunan bilangan jam empatan. Operasi penjumlahan (+) pada S didefinisikan seperti tabel berikut.

|  |  |
| --- | --- |
| + | 0 1 2 3 |
| 0123 | 0 1 2 31 2 3 02 3 0 13 0 1 2 |

Elemen identitas dari S terhadap penjumlahan adalah 0. Yang kebenarannya ditunjukan dalam penjelasan

berikut:

0-1 = 0. Dan 0 + 0 = 0

1-1 = 3. Dan 1 + 3 = 0

2-1 = 2. Dan 2 + 2 = 0

3-1 = 1. Dan 3 + 1 = 0

Dari penjelasan di atas nampak pula, bahwa benar invers dari elemen pada S terhadap operasi tambah adalah tunggal, atau x є S mempunyai invers terhadap operasi tambah maka invers dari x tersebut adalah tunggal.

Dan operasi tambah pada S di atas merupakan operasi biner, karena setiap hasil penjumlahan dari dua elemen S adalah elemen S pula.

Misal N adalah bilangan bulat positif yang ditulis dalam basis a. Maka N dapat diurai dalam b. Dan kemudian dapat ditulis

N = b1an + b2an-1 + b3an-2 + … + bna0

 Dengan a bilangan asli › 1, dan bi bilangan cacah < a
(b1 ≠ 0, dan a pertama ≠ 1).

Contoh 2:

 Empat puluh tujuh ribu dua ratus empat puluh lima, dapat ditulis sebagai

 47245 = 4.104 + 7.103 + 2.102 + 4 . 10 + 5.100

Contoh 3:

 Permasalahan lainnya, bukankah jam 14 dalam jam limaan berarti jam 4 atau sama dengan jam 2 dalam jam duabelasan. Dan 12 pada bilangan desimal (bilangan dengan dasar 10 atau basis 10)berarti sama dengan 22 (dibaca dua dua) pada bilangan dasar limaan (ditulis 225).

Contoh 4:

 Berikut menyatakan bilangan dengan basis lima dan dikenai operasi x (tabel perkalian dalam sistem limaan)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 0 | 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 0 | 4 | 13 | 22 | 31 |

Kita melihaat bahwa 35 x 25 = 115 (dibaca satu satu basis lima), ini berarti bahwa 115 : 25 = 35

Contoh 5:

Perhatikan masalah berikut:

1. Tentukan jumlah dari 2415 dan 1025
2. Tentukan hasil kali dari 35 dan 25
3. Tentukan hasil kali dari 2315 dengan 325
4. Bagilah 3425 dengan 35
5. Ubah 25 ke basis 2

Solusi:

Untuk 1); 2415 = 2 . 52 + 4 . 51 + 1

 1025 = 1 . 52 + 0 . 5 + 2 +

3 . 52 + 4 . 5 + 3 = 3435

Untuk 2); 35 x 25 = 25 + 25 + 25 = 115

Untuk 3); 231lima

 32lima x

 1012

 1243 +

 13442lima (dibaca satu tiga empatempat
 dua basis lima)

Untuk 4); 3425 : 35 = …

 Menemukan jawabnya ikuti langkah
 berikut (bagi cara panjang)

 112 sisa 1

 3 342

 3

 42

 3

 12

 11

 1

 Kita dapat 3425 : 35 = 1125 dan sisa 1

 Sekarang kita periksa:

 1125 sisa 1 x 35

 112lima

 3lima

 341 + sisa 1 = 3425

 Perhatikan pula tabel di atas, 125 : 35 = 25 sisa 1

Untuk 5); mengubah 25 ke basis 2

 Caranya:

 2 25 sisa 1

 2 12 sisa 0

 2 6 sisa 0

 2 3 sisa 1

 2 1 sisa 1

 0

 Maka didapat 25 = 110012

1. **Bujur Sangkar Ajaib**

Yang dimaksud adalah bujur sangkar atau persegi dengan luas daerah 9 satuan persegi atau yang dibangun oleh 9 buah persegi dengan masing-masing luas daerah sama yaitu 9 satuan persegi.

 Dikatakan ajaib bila ke 9 persegi atau kotak-kotaknya

diisi dengan bilangan, sehingga memungkinkan jumlah bialngan pada masing-masing kedua diagonalnya akan dapat dibuat sama, dan jumlah tersebut juga akan dapat dibuat sama dengan jumlah bilangan-bilangan pada setiap baris dan pada setiap kolom.

Sehingga jumlah bilangan-bilangan pada masing-masing baris = jumlah bilangan-bilangan pada masing-masing kolomnya = jumlah bilangan-bilangan masing-masing diagonalnya.

Contoh 6:

Sebuah bujur sangkar yang dibangun dari 9 bujur sangkar yang satu sama lain kongruen, berisi Sembilan bilangan asli pertama seperti nampak pada gambar berikut:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | a | 6 |
| b | 5 | c |
| 4 | d | 8 |

Bila a diganti dengan bilangan 7, b diganti dengan bilangan 9, c diganti dengan 1, dan d diganti dengan bilangan 3. Akan terpenuhi seperti penjelasan sebelumnya di atas. Yaitu jumlah tiap baris = jumlah setiap kolom = jumlah masing-masing diagonalnya.

Soal latihan 2

1. Buat bujur sangkar dimaksud uraian di atas. Kemudian
 kesembilan kotak yang ada isi dengan angka:

a. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Lakukan investigasi hinggga
 didapat yang berbeda dari contoh 6 diatas.

 b. {5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113}. Supaya jumlah
 tiap baris = jumlah tiap kolom = jumlah dari
 masing-masing diagonalnya.

 Lakukan investigasi untuk menemukan aturan yang

 mungkin yang dapat memudahkan penyelesaian
 persoalan tersebut.

2.Berikut lima buah permasalahan sederhana. Kerjakan
 dan lakukan investigasi sehingga menemukan aturan-
 aturan yang memungkinkan untuk memudahkan
 penyelesaian

1. Diketahui bilangan: 427, 3203, 10000 dalam basis 5 atau dalam basis 10. Tugas kita mengubah kedalam basis 5 atau sepuluh.
2. Bila 125 dalam basis 10, maka dalam basis 2 ditulis sebagai
3. M = {1, 2, 3, 4} dan operasi perkalian modulo 5. Hasil operasi modulo5 pada M ditunjukan dalam

tabel berikut.

|  |  |
| --- | --- |
| x | 1 2 3 4 |
| 1234 | 1 2 3 42 4 1 33 1 4 24 3 2 1 |

Permasalah:

1. Apakah M dengan operasi perkalian yang dinampakan tabel merupakan operasi biner. Jelaskan.
2. Adakah elemen identitas dari M. Berapa, dan jelaskan.
3. Apakah sifat medan berlaku pada M. jelaskan.
4. Perhatikan tabel pada contoh 4 di atas. Apa yang berbeda dengan tabel ini. Lakukan kajian dan berilah simpulan.
5. Tanggal, hari, dan jam berapakah sekarang. Dan tanggal, hari, jam berapakah pada:
6. 1500 menit kemudian
7. 2000 menit kemudian
8. 3000 menit kemudian
9. 4000 menit kemudian
10. 5000 menit kemudian
11. 50000 menit kemudian
12. Burton (1980; 81):

i). Give criteria for the divisibility of N by 3 and 8
 which depend on the digits of N when
 written in the base 9.

ii). Is the integer (447836)9 divisible by 3 and 8?

1. **Induksi Matematis**

Prinsip Induksi Matematis.

Misalkan {Pn} adalah suatu deret proposisi (pernyataan) yang memenuhi kedua pernyataan di bawah ini.

1. Pn adalah benar (biasanya n adalah 1)
2. Kebenaran Pi secara tidak langsung menyatakan kebenaran Pi+1, i ≥ n

Maka Pn adalah benar untuk

setiap bilangan bulat n ≥ n

 Induksi matematika disebut juga induksi lengkap.

Perhatikan pernyataan berikut.

Contoh 7:

 Jumlah n pertama bilangan ganjil adalah n2.

Benarkah pernyataan ini? Apakah pernyataan tersebut berlaku untuk semua n?

jawabnya dicari dengan induksi matematika sebagai berikut:

Pn = 1 + 3 + 5 + … + n = n2

Untuk n=2, maka 1 + 3 = 4 = 22 atau P2 = 22, benar

Misalkan P(k) benar, artinya:

 P(k) = 1 + 3 + 5 + ... +k = k2, benar.

 Bila n = k+1

 1 + 2 + 3 + … + k + (k+1) = k2 + 2k + 1

 = P(k+1)

 Jadi, benar untuk semua n

Contoh 8.

1. Buktikan dengan menggunakan induksi matematis 7n – 2n dapat habis dibagi 5
2. Buktikan dengan menggunakan induksi matematis 1 + 2 + 3 + … + (2n – 1) = n2 adalah benar untuk semua n, n bilangan asli
3. Buktikan dengan menggunakan induksi matematis;
n(n + 1)(n +2 ) dapat habis dibagi 6 untuk setiap bilangan asli n.

Solusi no 3);

Misalkan S himpunan yang membuat n(n+1) (n+2) habis
 dibagi 6.

Untuk n = 1,

 maka n(n+1) (n+2) = 1(1+1) (1+2) = 6

 Habis dibagi 6.

 Jadi untuk n = 1, adalah benar, atau 1 є S

Jika n = k,

 maka n(n+1) (n+2) = k(k+1) (k+2), k є S

Jika n=k+1,

maka bentuk tersebut menjadi

 (k+1) (k+2) (k+3)

 Kita buktikan apakah (k+1) (k+2) (k+3) habis dibagi 6

 Solusi:

 (k+1) (k+2) (k+3) = k(k+1) (k+2)+3(k+1) (k+2)

 Pada ruas kanan, karena k є S maka

k(k+1) (k+2) habis dibagi 6

untuk 3(k+1) (k+2):

kalau k diganti dengan 2, diperoleh
3(2+1) (2+2) =3 . 3 . 4=36,

habis dibagi 6.

Kalau k diganti dengan 2a, maka diperoleh:

3(k+1) (k+2) = 3(2a+1) (2a +2)

 (6a +3) (2a+2)

 12a2 + 18a + 6,

 habis dibagi 6

Kalau k diganti dengan 2a + 1, diperoleh:

3(k+1) (k+2) = 3(2a+1+1) (2a+1+2)

 = 3(2a+2) (2a+3)

 = 6(a+1) (2a+3),

 ternyata juga habis dibagi 6

 Jadi, terbukti bahwa 3(k+1) (k+2) habis dibagi 6

 Dengan demikian

(k+1) (k+2) (k+3) = k(k+1) (k+2) + 3(k+1) (k+2)

habis dibagi 6.

Simpulan :

 Jika k є S, maka k + 1 є S.

 Karena 1 є S, dan S adalah himpunan semua bilangan asli yang membuat bentuk n(n+1) (n+2) habis dibagi 6, maka dikatakan bahwa untuk setiap bilangan asli n pada n(n+1) (n+2) dapat habis dibagi 6.

Solusi no 1):

P1 = 71 – 21 habis dibagi 5 (benar)

Pk = 7k – 2k habis fibagi 5 ……………. (1)

P k + 1 = 7k+1 – 2k+1 ……………………… (2)

 (2) - (1)

→ (7k+1 – 2k+1) – (7k – 2k )

→ 7k . 7 – 2k . 2 – 7k + 2k

→ 7 – 2 habis dibagi 5

Solusi no 2):

P1 = (2 . 1 – 1 ) = 12 = 1 (benar)

Pk = 1 + 2 + 3 + … + (2k – 1) = k2

Pk+1 = 1 + 2 + 3 + … + (2k – 1) + {2(k + 1) - 1}

→ k2 + {2 (k + 1) – 1}

→ k2 + 2k + 1

→ (k + 1) (k + 1) = (k + 1)2

 Kebenaran Pk secara tak langsung menyatakan kebenaran Pk+1. Berdasarkan prinsip induksi matematis Pn adalah benar untuk setiap bilangan positif n.

Soal latihan 3

1. Gunakan prinsip induksi matematis untuk

membuktikan proposisi berikut adalah benar untuk setiap bilangan bulat n ≥ 1

1. 1 + 2 + 3 + … + n = 
2. 12 + 22 + 32 + … + n2 = 
3. Untuk setiap n dengan 34n – 1 dapat habis dibagi 80
4. Buktikan Pn : 2n › n + 20 adalah benar untuk setiap bilangan bulat n ≥ 5
5. Buktikan bahwa bilangan bulat yang berbentuk n(7n2 + 5) mempunyai 6k
6. Perhatihan tabel penjumlahan pada aritmetika jam dua belasan, yang ditulis CAYLEY seperti berikut:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Kemudian tugas mahasiswa melakukan investigasi terhadapnya. Misal berapakah 5 + 8? lalu menelaah berlakukah sifat medan. Dilanjutkan dengan melakukan kajian lanjutan untuk; misalnya jam empat-an, jam tujuh-an.

5) Tentukan hasil dari, misal:

 a). 3 dikali 145

 b). 1315 dikalikan 125

 c). 225 dibagi dengan 35

 d). bilangan decimal 132 menjadi

i). basis 5

ii). Basis 2

iii). Basis 7

6) Bila diketahui bilangan 10102, ditulis dalam basis:

 a). sepuluh (bilangan decimal) menjadi …

 b). lima menjadi …

 c). tiga menjadi …

 d). tujuh menjadi …

7) Jika diketahui himpunan bilangan di bawah tanda
 akar sebagai berikut:

 {, , , , , , , ,
 , , , ,, , ,
 , , , , , , ,
 ,,  }.

 Atas setiap bilangan anggota himpunan ini
 lakukan investigasi.

1. Apakah benar anggota himpunan diatas semuanya bilangan tidak rasional seperti bilangan **Pi** (π)? Beri penjelasan.
2. Berikan bukti untuk beberapa anggotanya sejalan pendapat pada a).
3. Tentukan nilai untuk: a) 3!, b) 5! C) 11! d)  6) Apakah  habis dibagi 11? Jelaskan.
4. Ubah system decimal berikut kesistem biner:
5. 5 c) 7 e) 21
6. 13 d) 19 f) 96 g) 101

**BAB IV**

**BILANGAN BULAT**

 Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal, misalnya 8, 11, 7845, -54

 Berlawanan dengan bilangan bulat adalah bilangan riil yang mempunyai titik desimal, seperti 7.0, 32.52, 0.03.

1. **Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat**

 Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat a ≠ 0. Kita menyatakan bahwa a habis membagi b (a *divides* b) jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sehingga

 b = ac.

 Notasi:

a І b (dibaca a membagi b), jika b = ac, c ∈ Z dan a ≠ 0. (Z = himpunan bilangan bulat).

Terkadang dapat juga pernyataan “a habis membagi b“ ditulis juga “b kelipatan a”.

dan ditulis pula:

**a І b = c є Z э b = ac, a ≠ 0**

akibat 1

 a ≠0, c ≠ 0 → ≥ 1.

  = 1 →  = 

 →  = 

Contoh 1

1. b = 24, a = 4 maka 24 = 4 . 6
2. 4 І 48, maka 48 = 4 . 12
3. 4 І 42, maka 42 = 8 . 5,25 (ingat c є Z) ?
4. 4 І 12 karena 12÷4 = 3 (bilangan bulat) atau

 12 = 4 × 3.

1. Tetapi 4 ⁄ 13 (dibaca 4 tidak membagi 13) karena 13÷4 = 3.25 (bukan bilangan bulat).

**Teorema 1**

(Burton,1980;24) For integer a, b, c, the following hold

i). a І 0, 1 І a, a І a є Z

ii). a І 1 jika dan hanya jika a = ±1

iii). a І b dan c І d → ac І bd

 jika b = k1a dan c = k2b, maka c = k1.k2.a

atau c = k3.a ↔ a І c

iv). a І b dan b І c → a І c

v). a І b dan b І a ↔ a = ±b (sama bila bilangan
 berlawanan)

vi). a І b dan b ≠ 0→  ≤ 

vii). a І b dan a І c → a І bx+cy untuk bilangan
 sembarang x dan y

Beberapa bukti akan diberikan dalam perkuliahan, dan atau akan menjadi tugas rumah mahasiswa.

**Teorema 2 (Teorema Euclidean)**.

 Teorema Euclide, dikenal juga sebagai teori pembagian.

Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat n > 0. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga

  **m = nq + r**

dengan 0 ≤ r < n. dan q = hasil bagi, r = sisa

Contoh 2.

a) 1987 dibagi dengan 97 memberikan hasil bagi 20 dan
 sisa 47: 1987 = 97 ⋅ 20 + 47

b) –22 dibagi dengan 3 memberikan hasil bagi –8 dan

 sisa 2: –22 = 3(–8) + 2

 c) tetapi –22 = 3(–7) – 1 salah karena r = –1 tidak

 memenuhi syarat 0 ≤ r < n.

soal Latihan 4

1. tentukan q dan r, jika diketahui a І b untuk persoalan berikut:
2. a = 215 dan b = 10
3. a = -47 dan b = 10
4. a = -143 dan b = 7
5. Bila hanya b yang diketahui yaitu 7, lakukan investigasi.
6. almarhum seorang ayah memiliki dua orang putra, tetapi memiliki utang 3. Tentukan berapa masing-masing anaknya harus bayar utang tersebut hingga lunas. dan tentukan sisanya.
7. Pada masalah berikut, tentukan sisa;
8. 34567 dibagi 80. Sisa?
9. 2100 dibagi 100. Sisa?
10. Burton (1980;23)
11. Use the Division Algorithm to establish that
12. Every odd integer is either of

the form 4k + 1 or 4k + 3

1. The square of any integer is either of the form 3k or 3k + 1
2. Prove that no integer in the sequence 11, 111, 1111, 11111, … is a ferfect square. [Hint: a typical term 111 … 111 can be written as 111 … 111 = 111 … 108 + 3 =
4k + 3]

1. **Pembagi Bersama Terbesar (PBB)**

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat tidak nol. Pembagi bersama terbesar (PBB = *greatest common divisor* atau gcd = faktor persekutuan terbesar atau FPB) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga d І a dan d І b. Dalam hal ini kita nyatakan bahwa FPB(a, b) = d.

Contoh 3.

Faktor pembagi 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45

Faktor pembagi 36: 1, 2, 3, 4, 9, 12, 18, 36

Faktor pembagi bersama dari 45 dan 36 adalah 1, 3, 9

1. FPB(45, 36) = 9.

Jawaban benar.

Kemudian perhatikan bila menggunakan konsep

teorema Euclide (teorema pembagian) cara berikut:

45 = 1 . 36 + 9

36 = 4 .9 + 0

Pada saat sisa sama dengan nol akibat 9k,maka 9 merupakan FPB.

1. FPB(72, 136) =?

Solusi:

136 = 1 . 72 + 64

72 = 1 . 64 + 8

64 = 8 . 8 + 0

Maka terlihat bahwa 8 adalah FPB dari 72 dan 136

1. FPB (1225, 125) =?

Solusi:

1225 = 9 . 125 + 100

125 = 1 . 100 + 25

100 = 4 . 25 + 0

Maka didapat 25 sebagai FPB(1225,125)

Soal Latihan 5

1). Cari FPB dari:

1. 210 dan 84
2. 172 dan 20
3. 123 dan 360
4. 12378 dan 3054
5. 6, 8 dan 20
6. 35, 91, dan 434

2). Burton (1980; 29):

a). If a І b, show that (-a) І b, a І (-b), and (-a) І (-b)

b). Given integers a, b, c, verify that

 i). if a І b, than a І bc;

 ii). If a І b and a І c , then a2 І bc

 iii). a І b if and only if ac І bc, where c ≠ 0

c). Prove or disprove: if a І (b+c) ,

 then either a І b or a І c

 d). for n ≥ 1, use induction to show that

 i) 7 divides 23n – 1 and 8 divides 32n + 7

 ii) 2n + (-1)n+1 is divisible by 3

1. **Algoritma Euclidean**

Algoritma Euclidean adalah algoritma untuk mencari
FPB dari dua buah bilangan bulat.

Euclid, penemu algoritma Euclidean, adalah seorang matematikawan Yunani yang menuliskan algoritmanya tersebut dalam bukunya yang terkenal

dengan judul bukunya “Element”.

Diberikan dua buah bilangan bulat tak-negatif m dan n (m ≥ n).

Algoritma Euclidean berikut mencari pembagi bersama terbesar dari m dan n.

**Algoritma Euclidean**

Langkah ke-1

Jika n = 0 maka

 m adalah FPB(m, n);

 stop.

 tetapi jika n ≠ 0,

 lanjutkan ke langkah ke-2.

Langkah ke-2

Bagilah m dengan n dan misalkan r adalah sisanya.

Langkah ke-3

Ganti nilai m dengan nilai n dan nilai n dengan

nilai r, lalu ulang kembali ke langkah ke-1.

Contoh 4.

m = 50, n = 12 dan dipenuhi syarat m ≥ n

50 = 4 . 12 + 2

12 = 3 . 4 + 0

Sisa pembagian terakhir sebelum 0 adalah 2, maka
FPB(50, 12) = 2.

Soal Latihan 6

1. Dengan menggunakan algoritma Euclidean,

tentukanlah FPB dari pasangan bilangan berikut:

1. 661, 392
2. 762, 291
3. 6237, 2673
4. 70, 25
5. 12378, 3054
6. Burton (1980; 37);
7. Find gcd (143, 227), gcd (306, 657), and gcd (272, 1479)
8. Use the Euclidean Algorithm to obtain integers x and y satisfying
9. Gcd (56, 72) = 56x + 72y
10. Gcd (24, 138) = 24x + 138y)
11. Gcd (119, 272) = 119x + 272y
12. Gcd (1769, 2378) = 1769x + 2378y
13. Assuming that gcd (a,b) = 1, prop the following
14. Gcd (a+b, a-b) =1 or 2.

[Hint: let d = gcd (a+b, a-b) and show that d І 2a, d І 2b; thus,

that d ≤ gcd (2a, 2b) = 2 gcd (a,b)]

1. Gcd (2a+b,a+2b) =1 or 3

1. **Relatif Prima**

Dua buah bilangan bulat a dan b dikatakan relatif prima jika FPB(a, b) = 1.

Contoh 5.

10 dan 3 relatif prima sebab FPB(10, 3) = 1.

Begitu juga 9 dan 13 relatif prima karena FPB(9, 13) = 1.

Tetapi 20 dan 4 tidak relatif prima sebab FPB(20, 4) = 5 atau ≠ 1.

Jika a dan b relatif prima, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga

 **ma + nb = 1**

Contoh 6.

1. Bilangan 14 dan 3 adalah relatif prima karena FPB(14, 3) =1, atau dapat ditulis

 5 . 14 + (-23) . 3 = 1 dengan m = 5 dan n = –23.

1. Bilangan 5 dan 2 adalah relatif prima karena FPB(5,2) = 1, atau dapat ditulis

1 . 5 + (-2) . 2 = 1 dengan m = 1 dan n = -2

1. Bilangan 7 dan 2 adalah relatif prima karena

FPB(7,2) = 1, atau dapat ditulis

1 . 7 + (-3) . 2 = 1 dengan m = 1 dan n = -3

1. Bilangan 8 dan 3 adalah relatif prima karena FPB(8,3) = 1, atau dapat ditulis

2 . 8 + (-5) . 3 = 1 dengan m = 2 dan n = -5

1. Tetapi 20 dan 5 tidak relatif prima karena
FPB(10, 2) = 5 ≠ 1 sehingga 10 dan 2 tidak dapat dinyatakan dalam m . 10 + n . 2 = 1.

Soal Latihan 7.

1. Pada masalah berikut tunjukan bahwa bila bilangan bulat a dan b relatif prima, dengan mengambil sebarang dua bilangan bulat m dan n sedemikian hingga berlaku

 ma +nb = 1. Untuk:

1. a = 20 dan b = 7
2. a = 35 dan b = 2
3. a = 48 dan b = 17
4. a = 7 dan b = 3
5. a = 5 dan b = 3
6. a = 3 dan b = 2
7. a = 33 dan b = 4
8. a = -23 dan b = -2
9. a = 13 dan b = 2
10. a = 3 dan b = 5
11. tentukan apakah bilangan-bilangan berikut adalah bilangan prima
12. 1009 e). 25
13. 111 f). 27
14. 107 g). 101
15. 133 h). 1111
16. Tentukan x dan y pada permasalah berikut

3x + 2y = GCD(3,2)

1. **Aritmetika Modulo**

 Misalkan a adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat > 0. Operasi a mod m (dibaca “a modulo m”) memberikan sisa jika a dibagi dengan m.

Notasi:

a mod m = r sedemikian sehingga a = qm + r,

dengan 0 ≤ r < m.

Bilangan m disebut modulus atau modulo, dengan hasil aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan {0, 1, 2, …, m – 1}. **\*)**

Aritmetika modulo nampaknya cocok digunakan untuk kriptografi. karena Setidaknya dua alasan berikut:

1. Oleh karena nilai-nilai aritmetika modulo berada

dalam himpunan berhingga (0 sampai modulus m – 1), maka kita tidak perlu khawatir hasil perhitungan berada di luar himpunan.

1. Karena kita bekerja dengan bilangan bulat, maka kita tidak khawatir kehilangan informasi akibat pembulatan (*round off*) sebagaimana pada operasi bilangan riil.

Contoh 7.

1. Beberapa hasil operasi dengan operator modulo:
2. 23 mod 5 = 3 (23 = 4 ⋅ 5 + 3)
3. 27 mod 3 = 0 (27 = 3 ⋅ 9 + 0)
4. 6 mod 8 = 6 (6 = 0 ⋅ 8 + 6)
5. 0 mod 12 = 0 (0 = 0 ⋅ 12 + 0)
6. – 41 mod 9 = 4 (–41 = (–5)9 + 4)
7. – 39 mod 13 = 0 (–39 = (–3)13 + 0)

Penjelasan untuk e): Karena a negatif, bagi |a|
 dengan m mendapatkan sisa r’. Maka a mod m =
 m – r’ bila r’ ≠ 0. Jadi |– 41| mod 9 = 5, sehingga
 –41 mod 9 = 9 – 5 = 4.

1. Saat penulis menulis bagian ini adalah Senin pk.20.49. Pertanyaannya, kapan buku ini selesai bila masih dibutuhkan waktu; (a) 1385 menit lagi? Dan
(b) 1439965 menit plus istirahat selama 8 jam setiap 24 jam.

Menemukan jawab atas masalah ini penulis akan mencoba menggunakan konsep aritmetika modulo.

Solusi:

1. 1385 menit

= 1385 mod 60 = 5 atau 1385 = 23 . 60 + 5menit

Ini artinya saya perlu waktu 23 jam dan 5 menit.
 Sehingga ini baru akan selesai besok malam atau
 hari Selasa sekira jam 19.44, dengan catatan
 penulis tidak tidur.

1. 1439965 menit

= 144000 – 35 menit

= 24000 jam – 35 menit

= 1000 hari – 35 menit (sementara abaikan)

1000 = 6 (mod 7) atau 1000 = 142 . 7 + 6 hari,

artinya dibutuhkan waktu 142 minggu dan 6 hari dikurangi 35 menit dari saat ini. Baru kemudian buku ini selesai.

Soal Latihan 8

1. Tentukan nilai untuk:
2. 2 mod 3 f) 18 mod 2
3. 8 mod 2 g) 18 mod 3
4. 11 mod 4 h) 18 mod 5
5. 25 mod 3 i) 15 mod 7
6. 30 mod 5 j) 5 mod 7
7. Untuk masalah berikut lakukan investigasi bila diketahui n mod 7 = x jika dan hanya jika

n є Z, -8 < Z < 15.

Kemudian nyatakan n dalam bentuk 7k + r

1. Burton (1980;75)
2. Prove each of the following assertions:

 i). If ab(mod n) and m І n, then ab(mod m)

 ii). If ab(mod n) and c › 0, then
 cacb(mod cn)

1. If ab(mod n), prove that gcd (a,n) = gcd (b,n)
2. Lakukan investigasi untuk dapat menjelaskan tanda bintang (\*) di atas.
3. Saat penulis menulis kembali dengan sedikit melakukan revisi pada bagian ini adalah Minggu pk.13.32 tanggal 17/2/20013. Pertanyaannya, kapan buku ini selesai bila masih dibutuhkan waktu; 1100 menit lagi? Dan (b) apakah pada perkuliahan perdana kelas karyawan BPCR buku ini dapat digunakan mahasiswa (abaikan masalah print out dan penggandaan, dan anggap bahwa penulis bekerja tanpa henti).

1. **Kongruen**

 Misalnya 33 mod 5 = 3 dan 13 mod 4 = 1, maka kita katakan 33 ≡ 3 (mod 5) (baca: 33 kongruen dengan 3 dalam modulo 5).

 Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dan m adalah bilangan > 0, maka a ≡ b (mod m) jika m habis membagi a – b. \*)

 Jika a tidak kongruen dengan b dalam modulus m,

maka ditulis a ≡/ b (mod m) .

Contoh 8.

1. 19 ≡ 1 (mod 6) ( 6 habis membagi 19 – 1)
2. –7 ≡ 15 (mod 11) (11 habis membagi –7 – 15)
3. 10 ≡/ 2 (mod 7) (7 tidak habis membagi 10 – 2)
4. –27 ≡/ 4 (mod 3) (3 tidak habis membagi –27 – 4)
5. 25 ≡ 2 (mod 30)
6. 28 ≡ 23.2(mod 30). Sehingga 28 : 30 bersisa 16
7. 27 = 2 . 26 ≡ 2.14(mod 50). Sehingga 27 : 50 akan bersisa 28
8. 210 = (25)2 ≡ 22. (mod 30). Sehingga 210 : 30 bersisa 4
9. 2100 ≡ (220) (mod 30)

 ≡ (24) (mod 30)

Jadi 2100 ≡ 24 (mod30) atau 2100 : 30 bersisa 16

1. 34 ≡ 1 (mod 80)
2. 3576 = (3144)4 ≡ 1 (mod 80)

 = (( 336)4)4 ≡ 1 (mod 80)

 = (((39)4)4)4 ≡ 1(mod 80)

 = 3.(((((32)4)4)4)4 ≡ 3.32 . 1 (mod 80)

 = 3.(((((34)4)4)4)2 ≡ 3.32 . 1 (mod 80)

Jadi 3576 ≡ 3 . 32 . 1 (mod 80)

 Atau 3576 : 80 akan bersisa 27

Kekongruenan a ≡ b (mod m) dapat pula dituliskan dalam hubungan

 **a = b + km**

yang dalam hal ini k adalah bilangan bulat.

Contoh 9.

1. 22 ≡ 2 (mod 5) dapat ditulis sebagai 22 = 2 + 5 ⋅ 4
2. –3 ≡ 15 (mod 6) dapat ditulis sebagai –3 = 15 + (–3)6

Untuk contoh berikut coba selesaikan

1. -2 ≡ 7 (mod 3)
2. 12 ≡ 2 (mod 10)
3. 117 ≡ 7 (mod 10)
4. -11 ≡ 9 (mod 10)

Berdasarkan definisi aritmetika modulo, kita dapat menuliskan a mod m = r sebagai

 **a ≡ r (mod m)**

Contoh 10.

Beberapa hasil operasi dengan operator modulo berikut:

1. 20 mod 3 = 2 dapat ditulis sebagai 20 ≡ 2 (mod 3)
2. 29 mod 3 = 0 dapat ditulis sebagai 29 ≡ 0 (mod 3)
3. 42 mod 5 = 2 dapat ditulis sebagai 42 ≡ 2 (mod 5)
4. 10 mod 7 =3 dapat ditulis sebagai 10 ≡ 3 (mod 7)
5. – 51 mod 9 = 3 dapat ditulis sebag –51 ≡ 3 (mod 9)
6. – 39 mod 13 = 0 dapat ditulis sebaga –39 ≡ 0 (mod 13)
7. 112 mod 11 = 2 dapat ditulis sebaga 112 ≡ 2 (mod 11)
8. 53 mod 10 = 5 dapat ditulis sebaga 53 ≡ 5 (mod 10)

 **Teorema 3.**

Misalkan m adalah bilangan bulat positif.

1. Jika a ≡ b (mod m) dan c adalah sembarang bilangan
 bulat maka

(i) (a + c) ≡ (b + c) (mod m)

(ii) ac ≡ bc (mod m)

(iii) ap ≡ bp (mod m) untuk suatu bilangan bulat
 tak negatif p.

2. Jika a ≡ b (mod m) dan c ≡ d (mod m), maka

(i) (a + c) ≡ (b + d) (mod m)

(ii) ac ≡ bd (mod m)

Bukti:

 1(ii) a ≡ b (mod m) berarti:

 ⇔ a = b + km

 ⇔ a – b = km

 ⇔ (a – b)c = ckm

 ⇔ ac = bc + Km

 ⇔ ac ≡ bc (mod m)

 2(i) a ≡ b (mod m) ⇔ a = b + k1m

 c ≡ d (mod m) ⇔ c = d + k2m

 ⇔ (a + c) = (b + d) + (k1 + k2)m

 ⇔ (a + c) = (b + d) + km ( k = k1 + k2)

 ⇔ (a + c) = (b + d) (mod m)

Bukti lainnya disampaikan dalam perkuliahan, dan atau menjadi tugas mahasiswa.

Contoh 11.

Misalkan 19 ≡ 1 (mod 3) dan 13 ≡ 1 (mod 3), maka menurut Teorema 3,

19 + 13 = 1 + 1 (mod 3) ⇔ 32 = 2 (mod 3)

19 . 13 = 1 ⋅ 1 (mod 3) ⇔ 247 = 1 (mod 3)

Perhatikanlah bahwa Teorema 3 tidak memasukkan operasi pembagian pada aritmetika modulo karena jika kedua ruas dibagi dengan bilangan bulat, maka kekongruenan tidak selalu dipenuhi.

Misalnya:

1. 10 ≡ 1 (mod 3) dapat dibagi dengan 2 karena 10/2 = 5
 tetapi 1/2 rasional
2. lakukan investigasi untuk yang berikut.

14 ≡ 4 (mod 5) dapat dibagi dengan 2, karena
 14/2 = 7 dan 4/2 = 2, tetapi 7 ≡ 2 (mod 5).

Temuan apa yang didapatkan?

Soal Latihan 9

lakukan investigasi untuk:

1. Bilangan prima dari 50!
2. Hari ini hari minggu pk. 0945. Hari dan jam berapa 143999999997 menit ke depan?
3. 34567 : 80 akan diperoleh sisa?
4. 220 : 100 akan diperoleh sisa?
5. (22225555 + 55552222) : 7 akan beroleh sisa?
6. 34566 habis dibagi 80. Tentukan sisa
7. Perhatikan barisan bilangan berikut;

11, 111, 1111, 11111, …

Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat yang merupakan kuadrat sempurna pada barisan tersebut yang berbentuk 4k + 3

1. Burton (1980; 76)
2. Find the remainders when 250 and 4165 are

divided by 7

1. What is the remainder when the sum

 15 + 25 + 35 + … 995 + 1005

 Is divided by 4?

1. Verify that 0, 1, 2, 22, 23, …, 29 form a complete set of residues modulo 11, but 0, 12, 22, 32, …, 102 do not

1. **Balikan Modulo (modulo invers)**

Jika a dan m relatif prima dan m > 1, maka kita dapat menemukan balikan (invers) dari a modulo m.

Balikan dari a modulo m adalah bilangan bulat a’ sedemikian sehingga

 **aa’ ≡ 1 (mod m)**

Bukti:

Dari definisi relatif prima diketahui bahwa FPB (a, m) = 1, dan akan terdapat bilangan bulat p dan q sedemikian sehingga

 pa + qm = 1

yang mengimplikasikan bahwa

 pa + qm ≡ 1 (mod m)

Karena qm ≡ 0 (mod m), maka

 pa ≡ 1 (mod m)

Kekongruenan yang terakhir ini berarti bahwa p adalah balikan dari a modulo m.

Pembuktian di atas juga menceritakan bahwa untuk mencari balikan dari a modulo m, kita harus membuat kombinasi lanjar dari a dan m sama dengan 1.

Koefisien a dari kombinasi lanjar tersebut merupakan balikan dari a modulo m.

Contoh 12.

Tentukan balikan dari:

1. 4 (mod 9)
2. 17 (mod 7), dan
3. 18 (mod 10).

Penyelesaian:

1. Karena PBB(4, 9) = 1, maka balikan dari

 4 (mod 9) ada.

 Dari algoritma Euclidean diperoleh bahwa

9 = 2 ⋅ 4 + 1

 Susun persamaan di atas menjadi

 –2 ⋅ 4 + 1 ⋅ 9 = 1

 Dari persamaan terakhir ini kita peroleh –2
 adalah balikan dari 4 modulo 9.

 Periksalah bahwa

 –2 ⋅ 4 ≡ 1 (mod 9)

 (9 habis membagi –2 ⋅ 4 – 1 = –9)

b) Karena FPB(17, 7) = 1, maka balikan dari
 17 (mod 7) ada.

 Dari algoritma *Euclidean* diperoleh rangkaian
 pembagian berikut:

 17 = 2 ⋅ 7 + 3 … (i)

 7 = 2 ⋅ 3 + 1 …. (ii)

 3 = 3 ⋅ 1 + 0 …. (iii) (yang berarti: PBB(17, 7) = 1)

 Susun (ii) menjadi:

 1 = 7 – 2 ⋅ 3 …. (iv)

 Susun (i) menjadi

 3 = 17 – 2 ⋅ 7 … (v)

 Sulihkan (v) ke dalam (iv):

 1 = 7 – 2 ⋅ (17 – 2 ⋅ 7) =

1 ⋅ 7 – 2 ⋅ 17 + 4 ⋅ 7 = 5 ⋅ 7 – 2 ⋅ 17

 atau

 –2 ⋅ 17 + 5 ⋅ 7 = 1

Dari persamaan terakhir ini kita peroleh –2
 adalah balikan dari 17 modulo 7.

 –2 ⋅ 17 ≡ 1 (mod 7)

 (7 habis membagi –2 ⋅ 17 – 1)

 c) Karena FPB(18, 10) = 2 dan 2 ≠ 1, maka balikan
 dari 18 (mod 10) tidak ada.

Soal Latihan 10

Tentukan balikan dari:

1. 12 (mod2)
2. 14 (mod3)
3. 14 (mod5)
4. 7 (mod2)
5. 90 (mod7)
6. 121 (mod3)
7. 2 (mod 9)
8. 3 (mod 4)
9. 5 (mod 3)
10. 3 (mod 5)
11. **Kekongruenan Lanjar**

 Kekongruenan lanjar adalah kongruen yang berbentuk

 **ax ≡ b (mod m)**

 dengan m adalah bilangan bulat positif, a dan b sembarang bilangan bulat, dan x adalah peubah bilangan

bulat.

Nilai-nilai x dicari sebagai berikut:

 ax = b + km

susun menjadi

|  |
| --- |
| **x =**  |

 dengan k adalah sembarang bilangan bulat.

Cobakan untuk k = 0, 1, 2, … dan k = –1, –2, ….

 Hingga menghasilkan x sebagai bilangan bulat.

Contoh 13.

Tentukan solusi dari:

1. 4x ≡ 3 (mod 9) dan
2. 2x ≡ 3 (mod 4)

Penyelesaian:

1. 4x ≡ 3 (mod 9)

x = 

 k = 0 → x = (3 + 0 ⋅ 9)/4 = 3/4 (bukan solusi)

 k = 1 → x = (3 + 1 ⋅ 9)/4 = 3

 k = 2 → x = (3 + 2 ⋅ 9)/4 = 21/4 (bukan solusi)

 k = 3 → x = (3 + 3 ⋅ 9)/4 = 30/4 (bukan solusi)

k = 4 → x = (3 + 4 ⋅ 9)/4 = 39/4 (bukan solusi)

 k = 5 → x = (3 + 5 ⋅ 9)/4 = 12

 …

 k = –1 → x = (3 – 1 ⋅ 9)/4 = –6/4 (bukan solusi)

 k = –2 → x = (3 – 2 ⋅ 9)/4 = –15/4 (bukan solusi)

 k = –3 → x = (3 – 3 ⋅ 9)/4 = –6

 …

 k = –6 → x = (3 – 6 ⋅ 9)/4 = –15

 …

 Nilai-nilai x yang memenuhi: 3, 12, … dan

 –6, –15, …

1. 2x ≡ 3 (mod 4)

 X = 

 Karena 4k genap dan 3 ganjil maka penjumlahannya menghasilkan ganjil, sehingga hasil penjumlahan tersebut jika dibagi dengan 2 tidak menghasilkan bilangan bulat. Dengan kata lain, tidak ada nilai-nilai x yang memenuhi
2x ≡ 3 (mod 4).

Soal Latihan 11

Burton (1980;89):

1. Solve the following linear congruences:
2. 25x ≡ 15 (mod 29)
3. 5x ≡ 2 (mod 26)
4. 6x ≡ 15 (mod 21)
5. 36x ≡ 8 (mod 102)
6. Find all solutions of the linear congruences 3x – 7y ≡ 11 (mod 13)
7. Solve the linear congruence 17x ≡ 3(mod 2 . 3 . 5 . 7)

 by solving the system 17x ≡ 3(mod 2),
17x ≡ 3(mod 3), 17x ≡ 3(mod 5), 17x ≡ 3(mod 7)

1. **Chinese Remainder Problem**

Pada abad pertama, seorang matematikawan China yang bernama Sun Tse mengajukan pertanyaan sebagai berikut:

Tentukan sebuah bilangan bulat yang bila dibagi dengan 5 menyisakan 3, bila dibagi 7 menyisakan 5, dan bila dibagi 11 menyisakan 7.

Pertanyaan Sun Tse dapat dirumuskan kedalam sistem kongruen lanjar:

 x ≡ 3 (mod 5)

 x ≡ 5 (mod 7)

 x ≡ 7 (mod 11)

 **Teorema 4.**

**(Chinese Remainder Theorem)**

Misalkan m1, m2, …, mn adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga FPB(mi, mj) = 1 untuk i ≠ j.

Maka sistem kongruen lanjar

  **x ≡ ak (mod mk)**

mempunyai sebuah solusi unik modulo

m = m1 ⋅ m2 ⋅ … ⋅ mn.

Contoh 14.

Temukan solusi dari pertanyaan Sun Tse di atas.

Penyelesaian:

Menurut persamaan di atas, kongruen pertama,

x ≡ 3 (mod 5),

memberikan x = 3 + 5k1 untuk beberapa nilai k.

Sulihkan ini ke dalam kongruen kedua menjadi

3 + 5k1 ≡ 5 (mod 7), dari sini kita peroleh

k1 ≡ 6 (mod 7), atau k1 = 6 + 7k2 untuk beberapa
 nilai k2.

Jadi kita mendapatkan

 x = 3 + 5k1 = 3 + 5(6 + 7k2) = 33 + 35k2

yang mana memenuhi dua kongruen pertama.

Jika x memenuhi kongruen yang ketiga, kita harus mempunyai

33 + 35k2 ≡ 7 (mod 11),

yang mengakibatkan

 k2 ≡ 9 (mod 11) atau k2 = 9 + 11k3.

Sulihkan k2 ini ke dalam kongruen yang ketiga

menghasilkan

 x = 33 + 35(9 + 11k3) ≡ 348 + 385k3 (mod 11). Dengan demikian,

x ≡ 348 (mod 385) yang memenuhi ketiga konruen tersebut.

Dengan kata lain, 348 adalah solusi unik modulo 385.
 Catatlah bahwa 385 = 5 ⋅ 7 ⋅ 11.

 Solusi unik ini mudah dibuktikan sebagai berikut.

Solusi tersebut modulo m = m1 ⋅ m2 ⋅ m3 =

 5 ⋅ 7 ⋅ 11 = 5 ⋅ 77 = 11 ⋅ 35.

Karena 77 . 3 ≡ 1 (mod 5),

55 ⋅ 6 ≡ 1 (mod 7), dan

35 ⋅ 6 ≡ 1 (mod 11),

solusi unik dari sistem kongruen

 tersebut adalah

 x ≡ 3 ⋅ 77 ⋅ 3 + 5 ⋅ 55 ⋅ 6 + 7 ⋅ 35 ⋅ 6 (mod 385)

 ≡ 3813 (mod 385) ≡ 348 (mod 385)

Soal Latihan 12

Burton (1980; 90):

(Ancient Chinese Problem).

 A bad of 17 pirates stole a sack of gold coins. When they tried to divide fortune into equal portions, 3 coins remainded. In the ensuing brawl over who should get the extra coins, one pirate was killed. The wealth was redistributed, but this time an equal division left 10 coins. Again an argument developed in which another pirate was killed. But now the total fortune was evenly distributed among the survivors. What was the least number of coins that

 could have been stolen?

1. **Bilangan Prima**

 Bilangan bulat positif p (p > 1) disebut bilangan prima jika pembaginya hanya 1 dan p.

Contoh 15.

23 adalah bilangan prima karena ia hanya habis dibagioleh 1 dan 23.

Karena bilangan prima harus lebih besar dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2,

 yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, ….

 Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil, kecuali 2 yang merupakan bilangan genap.

Bilangan selain prima disebut bilangan **komposit** (*composite*).

Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh 2, 4, 5, dan 10, selain 1 dan 20 sendiri.

Jadi bilangan komposit adalah bilangan bulat yang bukan bilangan prima, atau bilangan bulat yang dapat dinyatakan atas faktor-faktor yang masing-masing bukan bilangan 1.

 **Teorema 5.**

**(The Fundamental Theorem of Arithmetic).**

 Setiap bilangan bulat positif yang lebih besar atau sama dengan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.

Contoh 16.

 6 = 2 × 3 (2 buah faktor prima)

 108 = 2 × 2 × 3 × 3 x 3(5 buah faktor prima)

 13 = 13 (atau 1 × 13) (1 buah faktor prima)

12 = 2 x 2 x 3 (tiga buah faktor prima)

Untuk menguji apakah n merupakan bilangan prima atau komposit, kita cukup membagi n dengan sejumlah bilangan prima, mulai dari 2, 3, … , bilangan prima ≤ √n.

Jika n habis dibagi dengan salah satu dari bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan komposit, tetapi jika n tidak habis dibagi oleh semua bilangan prima tersebut, maka n adalah bilangan prima.

Contoh 17.

Tunjukkan apakah yang berikut merupakan bilangan prima atau komposit ;

1. 171
2. 199 dan
3. 101

Penyelesaian:

1. √171 = 13.077.

Bilangan prima yang ≤ √171 adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.

1. √199 = 14.107.

Bilangan prima yang ≤ √199 adalah 2, 3, 5, 7, 11,

13. Karena 199 tidak habis dibagi 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

Terdapat metode lain yang dapat digunakan untuk menguji keprimaan suatu bilangan bulat, yang terkenal dengan Teorema Fermat.

Fermat (dibaca “Fair-ma”) adalah seorang matematikawan Perancis pada tahun 1640.

 **Teorema 6**

**(Teorema Fermat).**

Jika p adalah bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p, yaitu

|  |
| --- |
| FPB(a, p) = 1, maka  ap–1 ≡ 1 (mod p)  |

Contoh 18.

Kita akan menguji apakah 17 dan 21 bilangan prima atau bukan.

 Di sini kita mengambil nilai a = 2 karena FPB(17, 2) = 1 dan FPB(21, 2) = 1.

Untuk 17,

217–1 = 65536 ≡ 1 (mod 17)

karena 17 membagi

 65536 – 1 = 65535 (65535÷17 = 3855). Maka 17 adalah bilangan prima.

Untuk 21,

 221–1 =1048576 ≡⁄ 1 (mod 21)

karena 21 tidak habis membagi

 1048576 – 1 = 1048575.

Kelemahan Teorema Fermat: terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga 2n–1 ≡ 1 (mod n). Bilangan bulat seperti itu disebut bilangan prima semu (pseudoprimes).

 Misalnya komposit 341 (yaitu 341 = 11 ⋅ 31) adalah bilangan prima semu karena menurut teorema Fermat,

 2340 ≡ 1 (mod 341)

Untunglah bilangan prima semu relatif jarang terdapat.

Contoh 19.

Periksalah bahwa

1. 316 ≡ 1 (mod 17) dan
2. 186 ≡ 1 (mod 49).

Penyelesaian:

1. Dengan mengetahui bahwa kongruen

33 ≡ 10 (mod 17),

kuadratkan kongruen tersebut menghasilkan

 36 ≡ 100 ≡ –2 (mod 17)

 Kuadratkan lagi untuk menghasilkan

 312 ≡ 4 (mod 17)

 Dengan demikian,

 316 ≡ 312⋅ 33 ⋅ 3 ≡ 4 ⋅ 10 ⋅ 3 ≡ 120 ≡ 1 (mod 17)

1. Caranya sama seperti penyelesaian a) di atas:

 182 ≡ 324 ≡ 30 (mod 49)

 184 ≡ 900 ≡ 18 (mod 49)

 186 ≡ 184 ⋅ 182 ≡ 18 ⋅ 30 ≡ 540 ≡ 1 (mod 49)

Soal Latihan 13

1. Tentukan apakah bilangan berikut prima atau

bukan:

1. 19 d). 41 g). 117
2. 22 e). 63 h). 219
3. 23 f). 51 i). 1121
4. Jika S sebuah himpunan bilangan bulat dari:
5. 0 sampai 150,
6. 4 sampai 173,
7. 2 sampai 225,
8. 3 sampai 99,

Maka banyaknya bilangan prima pada S adalah?

1. Tentukan formula/aturan dari barisan bilprim
(a) <10 (b) < 30 (c) < 50 (d) < 100 (e) < n, nєN
2. Burton (1980; 96):

a). use Fermat’s method to factor

 i) 2279

 ii) 10541

 iii) 340663. [Hint: the smallest square just
 exceeding 430663 is 5872]

b). factor the number 211 – 1 by Fermat’s
 factorization method.

1. **Fungsi Euler φ**

 Fungsi Euler φ medefinisikan φ(n) untuk n ≥ 1 yang menyatakan jumlah bilangan bulat positif < n yang relatif prima dengan n.

Contoh 20.

Tentukan φ(20).

Penyelesaian:

Bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 20 adalah 1 sampai 19.

Di antara bilangan-bilangan tersebut, terdapat φ(20) = 8 buah yang relatif prima dengan 20, yaitu 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

Untuk n = 1, 2, …, 10, fungsi Euler adalah

 φ(1) = 0 φ(6) = 2

 φ(2) = 1 φ(7) = 6

 φ(3) = 2 φ(8) = 4

 φ(4) = 2 φ(9) = 6

 φ(5) = 4 φ(10) = 4

Jika n prima, maka setiap bilangan bulat yang lebih kecil dari n relatif prima terhadap n.

Dengan kata lain,

 **Teorema 7**

 **φ(n) = n – 1 hanya jika n prima.**

Contoh 21.

φ(3) = 2

φ(5) = 4

φ(7) = 6

φ(11) = 10

φ(13) = 12, …

**Teorema 8.**

 Jika n = pq adalah bilangan komposit dengan p dan q

 prima, maka φ(n) = φ(p) φ(q) = (p – 1)(q – 1).

Contoh 22.

Tentukan φ(21).

Penyelesaian:

Karena 21 = 7 ⋅ 3, φ(21) = φ(7) φ(3) = 6 ⋅ 2 = 12 buah bilangan bulat yang relatif prima terhadap 21, yaitu 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 19, 20.

**Teorema 9.**

Jika p bilangan prima dan k > 0,

 maka φ(pk) = pk – pk-1 = pk-1 (p – 1) .

Contoh 23.

Tentukan φ(16).

Penyelesaian:

Karena φ(16) = φ(24) = 24 – 23 = 16 – 8 = 8,

maka ada delapan buah bilangan bulat yang relatif prima

terhadap 16, yaitu 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

**Teorema 9**

 (Euler’s generalization of Fermat theorem).

Jika FPB(a, n) = 1, maka

 aφ(n) mod n = 1 (atau aφ(n) ≡ 1 (mod n) )

* Bukti teorema-teorema di atas tidak disajikan dalam tulisan ini, dan bahkan mungkin dalam perkuliahan. Berdasar pada pangdangan penulis bahwa hal ini rujuk dengan pencapaian tujuan perkuliahan.

Soal Latihan 14

1. Tentukan banyaknya bilangan yang relative prima:
2. Dari 1 sampai 21 dengan 22
3. Dari 2 sampai 18 dengan 19
4. Dari 5 sampai 100 dengan 101
5. Tentukan :
6. Φ(22)
7. Φ(21)
8. Φ(20)
9. Φ(15)
10. Φ(59)
11. Φ(112)
12. Φ(225)
13. Burton (1980; 140):

a). Calculate Φ(1001), Φ(5040), and Φ(36,000)

b). Verify that the equality Φ(n) = Φ(n + 1) =
 Φ(n + 2) holds when n = 5186

c). Establish each of the assertions below:

 i). if n is an odd integer, then Φ(2n) = Φ(n)

 ii). If n is an even integer, then Φ(2n) = 2 Φ(n)

 iii). Φ(3n) = 2 Φ(n) if and only if 3 І⁄ n

 iv). Φ(3n) = 23Φ(n) if and only if 3 І n

1. **Persamaan Diopthantine**

Dari bentuk umum ax + by + c, dipinta jawaban yang bulat-bulat saja.

 **Teorema 10.**

Bentuk ax + by + c, adalah mempunyai jawaban jika dan hanya FPB (a,b) membagi c. jika x = 0 dan y = 0 adalah solusi khusus maka jawaban yang lainnya diberikan dengan rumusan

 x = xo +  y = yo - 

Catatan:

x,y adalah absis ordinat yang dicari

xo, yo adalah absis yang ada aksen

b adalah koefisien dari y’

a adalah koefisien dari x’

d adalah FPB koefisien

contoh 24

1. Diketahui persamaan berikut 123 x + 360 y = 99. Permasalahan adalah adakah selesaian untuk persamaan tersebut?

Solusi:

Berdasar teorema 10 di atas, maka langkah awal mencari FPB dari 123 dan 360.

360 = 2 . 123 +114

123 = 1 . 114 + 9

114 = 12 . 9 + 6

9 = 1 . 6 + 3

6 = 2 . 3 + 0

Didapat FPB (123, 360) = 3. Dan 3 І99. Jadi persamaan memiliki jawab.

1. dari persamaan 172x + 20y = 1000
2. Adakah jawaban atau harga untuk x, y ?
3. Tentukan; i) tentukan harga untuk xo, yo

ii) harga untuk x, y

solusi;

1. FPB dari 172 dan 20 adalah 4

Karena FPB = 4 dan 4 І 1000, jadi persamaan
 tersebut di atas punya jawab.

1. i) Untuk menghitung xo dan yo; …

ingat; 172 dan 20 adalah koefisien, 4 adalah FPB. Sehingga kemudian kita dapat menuliskan

4 = 172 . 2 – 20 . 17

→ 1000 = 172 . 500 – 20 . 4250

→ 1000 =172 . 500 + 20(-4250)

Kita tahu bahwa a = 172, b = 20. Maka kita mendapat nilai untuk xo = 500, dan yo = -4250

ii) untuk menentukan harga untuk x, dan y

x = 500 +  y = -4250 - 

x = 500 + 5t y = -4250 -43t

perhatikan; t adalah sembarang bilangan bulat sedangkan x,y adalah bulat positif.

Sehingga kemudian kita dapat menuliskan,

500 + 5t › 0 -4250 – 43t › 0

→ 5t › -500 → -43t › 4250

→ t › -100 → t < - 98

 Maka didapat t = -99

Dan untuk x, y;

X = 500 + 5t y = -4250 -43t

→ x = 500 – 495 → y = -4250 + 4257

→ x = 5 → y = 7

Jadi didapat HP untuk persamaan diopthantin di atas adalah (5,7)

Soal latihan 15

Dari persamaan persamaan yang diberikan

1. Adakah jawaban atau harga untuk x, y ?
2. Tentukan;

i) tentukan harga untuk xo, yo

ii) harga untuk x, y

 1) 14x + 35y = 93

 2) 14x + 35y = 91

 3) 100x + 500y = 5000

 4) Burton (1980; 88):

 a) Using congruence, solve the Diophantine
 equations below:

i) 4x + 51y = 9. [Hint: 4x ≡ (mod 51) gives
 x = 15 + 51t, while 51y ≡ 9 (mod 4) give
 y = 3 + 4s. Find the relation between s and t]

ii) 12x + 25y =331

 iii) 5x – 53y = 17

1. **Saringan Eratosthenes**

Saringan Eratosthenes digunakan untuk mengetahui apakah sekumpulan bilangan tertentu merupakan bilangan prima atau bukan.

Saringan ini terdiri dari lima rangkap (lembar) kertas warna yaitu warna merah, hijau, kuning, biru, dan putih dan berlubang. Warna hijau menyaring kelipatan 2-an, warna kuning kelipatan 3-an, warna biru kelipatan 5-an, dan warna putih kelipatan 7-an.

Contoh 25.

(… dan kemudian menjadi tugas mahasiswa untuk melanjutkan).

Diberikan sekumpulan bilangan asli dari 1 hingga 100. Kita dapat menentukan kumpulan bilangan prima dari kumpulan bilangan tersebut, dengan cara mengeliminir setiap kelipatan 2, 3, 5, dan 7 kecuali dirinya.

Selanjutnya menjadi tugas mahasiswa untuk melakukan

investigasi. Hasil adalah 27 buah bilangan prima.

Soal Latihan 16

1. Diberikan sekumpulan bilangan asli dari:
2. 5 hingga 37
3. 11 hingga 100
4. 1 hingga 70
5. 1 hingga 150
6. 1 hingga 200
7. 1 hingga 300
8. 1 hingga 500
9. 1 hingga 1000

 Tentukan banyaknya masing-masing bilangan
 prima pada setiap kumpulan bilangan tersebut.

1. Burton (1980; 57):

Employing the Sieve of Eratosthenes, obtain

all the primes between 100 and 200

1. **Palindrome**

Yang dimaksud adalah bilangan palindrome, yaitu bilangan yang tersusun dari bilanga-bilangan.

Bilangan tersebut yang bila dibaca angka-angkanya dari kiri sama dengan bila dibaca angka-angkanya dari kanan.

Contoh 26.

12321 adalah bilangan palindrome digit ganjil

4727557274 adalah bilangan polindrome digit genap.

Masalah kemudian adalah, bila kita punya bilangan palindrome N dan a sebarang bilangan bulat. Pertanyaan apakah a І N ?

 Menemukan jawab atas masalah seperti ini ada tip tambahan yang harus dingat adalah, jumlahkan angka-angka bilangan N (jumlah dari kiri = jumlah dari kanan), bila jumlah tersebut habis dibagi a maka dapat dipastikan bahwa N akan habis dibagi a (a І N).

Contoh 27.

Misalkan kita punya bilangan palindrome dengan digit ganjil 7 antara lain 2567652.

Pertanyaannya apakah 3 habis membagi bilangan palindrome tersebut?

Solusi:

 Kita lihat bahwa 2 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5+ 2 = 33. Dan 33 habis dibagi 3, sehingga pasti bahwa 2567652 akan habis dibagi 3. Untuk ini kalkulator dapat digunakan selain cara

manual pembagian cara panjang.

Contoh 28.

Perhatikan barisan bilangan palingdrom berikut:

11, 111, 1111, 11111, …

Bagaimanakah bentuk bilangan-bilangan palingdrom pada barisan tersebut?

Solusi:

11 = 8 + 3 = 2 . 4 + 3

111 = 100 + 11 = 100 + 8 + 3 = 108 + 3 = 27 . 4 + 3

 1111 = 1000 + 100 + 11

 = 1000 + 100 + 8 + 3

 = 1108 + 3

 = 277 . 4 + 3

 11111 = 10000 + 1000 + 100 + 11

 = 10000 + 1000 + 100 + 8 + 3

 = 11108 + 3

 = 2777 . 4 + 3

Dan seterusnya.

Yang nampak sampai di sini adalah, empat dari bilangan palingdrom pada barisan di atas berbentuk 4k + 3. Dengan k1 = 2, k2 = 27, k3 = 277, dan k4 = 2777.

Soal latihan 17

1. Lakukan investigasi untuk permasalahan berikut:

Untuk bilangan bukan palingdrom 7 digit berikut, 2x99561 diketahui habis dibagi 9. Tentukan x. (catatan; gunakan modiv kiri atau modiv kanan).

1. Burton (1980; 82):
2. A palindrome is a number that reads the same backwards as forwards (for instance, 373 and 521125 are palindromes). Prove that any palindrome with an even number of digits divisible by 11
3. Show that the integer

1111, 111111, 11111111, …, 111 … 11, …

Where an even number of digits are involved, are all composite.

**Rujukan:**

Burton M David (1980). *Elementary Number
 Theory*. Boston, Allyn and Bacon, Inc

Marchasan (2012). *Teori Bilangan Materi Perkuliahan
 pada STKIP Siliwangi Cimahi.* Cimahi, Mandiri

 **KUMPULAN SOAL**

1. Temukan Selesaian Setiap Item Masalah Berikut dengan jelas. Logis, dan Benar
2. Utang suatu negara 21500 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah peraturan untuk 127.000.000 jiwa warga negara dewasanya membayar bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
3. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
4. FPB(27,56)= 27x + 56y
5. Jika bilangan 2789x65430 habis dibagi 9
6. Jika bilangan 2789x654y4 habis dibagi 8
7. Untuk bilangan berikut, nyatakan dalam bentuk 3k + (-1)
8. 11 c. 1111 d. 11111

b. 111 e. 111111

1. Temukan jawab untuk masalah berikut dengan menggunakan Algoritma Eclude
2. GCD (27,56) = … c. GCD ( 128,56) = …
3. GCD (2012, 340) = …
4. Diketahui barisan bilangan berikut
5. 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101, 113
6. 36, 43, 50, 54, 61, 68, 72, 79, 86

Masukan setiap bilangan dari a) dan b) pada kotak kosong seperti di bawah (satu kotak berisi hanya satu bilangan), sehingga jumlah bilangan setiap baris akan sama dengan jumlah bilangan setiap kolom akan sama dengan jumlah bilangan setiap diagonalnya.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Utang suatu negara 22500 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah peraturan untuk 127.000.000 jiwa warga negara dewasanya membayar bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
2. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
3. FPB(24,54)= 24x + 54y
4. Jika bilangan 2787x75430 habis dibagi 9
5. Jika bilangan 6789x552y4 habis dibagi 8
6. Temukan jawab untuk masalah berikut dengan menggunakan Algoritma Eclude
7. GCD (28,59) = … c. GCD ( 122,58) = …
8. GCD (2016, 342) = …
9. Diketahui barisan bilangan berikkut
10. 15, 17, 19, 27, 29, 31, 39, 41, 43
11. 36, 53, 60, 74, 91, 108, 122, 139, 156

Masukan setiap bilangan dari a) dan b) pada kotak kosong seperti di bawah (satu kotak berisi hanya satu bilangan), sehingga jumlah bilangan setiap baris akan sama dengan jumlah bilangan setiap kolom akan sama dengan jumlah bilangan setiap diagonalnya.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. Utang suatu negara 22000 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah kebijakan untuk 255.000.000 jiwa warga negara dewasanya agar membayar secara bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
2. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
3. Nilai fungsi Euler untuk Φ(112)= y
4. Jika bilangan 287x546y12 habis dibagi 8
5. Jika 6x Ξ 5(mod21)
6. 14x + 35y = 8750
7. Untuk masalah berikut:
8. Hitunglah: (1) 1001012 dikali 1112 (2) 2134 dikali 3214
9. Ubahlah 34 ke basis: (1) dua (2) tiga (3) tujuh)
10. Pada bilangan 456710200389, nilai tempat bilangan 6 dibagi nilai tempat bilangan 9 akan habis atau bersisa? Jelaskan
11. Beri persetujuan dan alasannya atas setiap masalah berikut, untuk lainnya temukan solusi.
12. Suatu bilangan adalah kuadrat dari bilangan, ujung lambang (satuannya) tidak mungkin lambang angka 3.
13. Suatu bilangan habis dibagi 15 jika dan hanya jika jumlah angka-angka pembentuknya habis dibagi tiga dan ujungnya (satuannya) adalah 0 atau 5
14. Jika suatu bilangan habis dibagi 4, maka bilangan itu habis dibagi 8
15. Jika suatu bilangan habis dibagi 8 maka bilangan itu habis dibagi 4
16. Pembagi bersama terbesar PBT atau faktor persekutuan terbesar (FPB) dari dua bilangan paling besar sama dengan salah satu bilangan itu
17. Bila kita membuka buku bacaan, akan Nampak dua nomor halaman (kiri dan kanan). Bila kita jumlahkan nomor halaman itu akan kita dapatkan bilangan genap
18. Jika x berupa bilangan bulat, maka x2 – x + 1 berupa bilangan ganjil
19. Seorang tukang kerupuk membilang kerupuknya dengan mengambil sepuluh-sepuluh. Pada pengambilan terakhir (ke-32) hanya ada 6 kerupuk. Anaknya mengulangi membilang dengan mengambil empat-ampat. Pengambilan terakhir jatuh pada bilangan ke-80 dengan hanya dua kerupuk
20. Pada acara perpisahan ada acara saling tukar fhoto, tiap teman memperoleh satu photo dari temannya. Jika acara ini dihadiri 20 orang, maka ada 40 fhoto pada acara itu.
21. FPB dari 210 dan 84 adalah 21

1. Temukan Selesaian Setiap Item Masalah Berikut dengan jelas. Logis, dan Benar
2. Utang suatu negara 31500 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah peraturan untuk 81.000.000 jiwa warga negara dewasanya membayar bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
3. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
4. FPB(12,26)= 12x + 26y
5. Jika bilangan 7789x45420 habis dibagi 9
6. Jika bilangan 27876x653y1 habis dibagi 8
7. Temukan jawab untuk masalah berikut dengan menggunakan Algoritma Eclude
8. GCD (23,55) = … c. GCD ( 122,16) = …
9. GCD (2142, 241) = …
10. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
11. Nilai fungsi Euler untuk Φ(112)= y
12. Jika bilangan 287x546y12 habis dibagi 8
13. Jika 6x Ξ 5(mod21)
14. 14x + 35y = 8750
15. Untuk masalah berikut:
16. Hitunglah: (1) 1001012 dikali 1112 (2) 2134 dikali 3214
17. Ubahlah 34 ke basis: (1) dua (2) tiga (3) tujuh)
18. Pada bilangan 456710200389, nilai tempat bilangan 6 dibagi nilai tempat bilangan 9 akan habis atau bersisa? Jelaskan
19. Utang suatu negara 21100 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah kebijakan untuk 125.000.000 jiwa warga negara dewasanya agar membayar secara bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
20. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
21. Nilai fungsi Euler untuk Φ(28)= y
22. Jika bilangan 234x512y34 habis dibagi 8
23. Jika 6x Ξ 5(mod7)
24. 15x + 35y = 2500
25. Untuk masalah berikut:
26. Hitunglah: (1) 10112 dikali 1112 (2) 134 dikali 324
27. Ubahlah 4 ke basis: (1) dua (2) tiga (3) tujuh)
28. Diketahui sebarang tiga bilangan bulat p, q, r dengan p membagi q dan bersisa r. Tulis tiga presentasi matematis yang relevan dengan makna dari pernyataan tersebut. Kemudian representasikan p dan r dalam konteks sifat urutan.
29. Bilangan a, b adalah dua bilangan yang relatif prima maka dapat direpresentasikan dengan GCD(a,b) = ax + by, setujukan? Jelaskan. Kemudian, ambilah sembarang dua bilangan bulat sebagai a dan b dimaksud di atas. Carilah nilai untuk x dan y sesuai dengan bilangan a dan b yang diambil.
30. Temukan Selesaian Setiap Item Masalah Berikut dengan jelas. Logis, dan Benar
31. Utang suatu negara 21500 juta satuan mata uang. Sehingga untuk mengatasinya keluarlah kebijakan untuk 254.000.000 jiwa warga negara dewasanya agar membayar secara bersama-sama dengan jumlah yang tidak berbeda. Jika kebijakan ini terealisir, maka negara tersebut mungkin/tidak mungkin; (i) memiliki sejumlah dana sisa (ii) masih memiliki utang sebesar?
32. Tentukan nilai x, y pada masalah berikut
33. Nilai fungsi Euler untuk Φ(168)= y
34. Jika bilangan 237x512y34 habis dibagi 8
35. Jika 5x Ξ 5(mod11)
36. 14x + 35y = 8750
37. Untuk masalah berikut:
38. Hitunglah: (1) 1001012 dikali 1112 (2) 2134 dikali 3214
39. Ubahlah 34 ke basis: (1) dua (2) tiga (3) tujuh)
40. Diketahui sebarang tiga bilangan bulat p, q, r dengan p membagi q dan bersisa r. Tulis tiga presentasi matematis yang relevan dengan makna dari pernyataan tersebut. Kemudian representasikan p dan r dalam konteks sifat urutan.
41. Bilangan a, b adalah dua bilangan yang relatif prima maka dapat direpresentasikan dengan GCD(a,b) = ax + by, setujukan? Jelaskan. Kemudian, ambilah sembarang dua bilangan bulat sebagai a dan b dimaksud di atas. Carilah nilai untuk x dan y sesuai dengan bilangan a dan b yang diambil.
42. Dalam Rencana Anggaran Belanja sebuah daerah setingkat kecamatan teralokasi dana sebesar 51000 juta rupiah. Anggaran yang telah tersedia tersebut akan dibagikan ke 121 desa di wilayah kecamatan tersebut sama banyak dengan tujuan percepatan pembanguan daerah pedesaan. Catatan: harus ada sisa, sebab sisa yang diharapkan telah dialokasikan untuk pembiayaan distribusi logistik.

Logiskan pernyataan di atas? Dan apakah perbandingan dana sisa dengan dana yang diterima masing-masing desa adalah anggota bilangan rasional? Jelaskan.