PENGANTAR MATEMATIKA DISKRIT

DIKTAT

Oleh:

Rippi Maya

PRAKATA

Segala puji hanya bagi Allah, atas segala nikmat dan karunia-Nya kepada penulis selama ini, sehingga diktat ini selesai disusun. Salawat serta salam semoga terlimpah curahkan kepada junjungan besar kita, Nabi Muhammad saw beserta keluarga, sahabat, dan para pengikutnya sampai akhir jaman.

Diktat ini awalnya disusun sebagai pendamping bahan ajar kuliah Matematika Diskrit (2 SKS) di program studi Pendidikan Matematika UIN-SGD Bandung. Namun sejak tahun 2018, diktat ini juga digunakan oleh mahasiswa program studi Pendidikan Matematika IKIP Siliwangi, sebagai materi ajar mata kuliah Matematika Diskrit yang penulis ampu. Secara keseluruhan, ada 4 bab yang dibahas dalam diktat ini. Tiga bab awal sudah disusun sejak tahun 2015. Bab I membahas tentang Induksi Matematik. Beberapa prinsip induksi matematik (PIM), yaitu sederhana, yang dirampatkan dan kuat akan dibahas dalam bab ini. Bab II tentang Rekurensi, yang akan membahas tentang barisan yang terdefinisi secara rekursif dan relasi rekurensi. Bab III tentang Prinsip Penghitungan, yang hanya akan membahas kaidah penjumlahan dan perkalian, prinsip inklusi eksklusi, dan prinsip sarang merpati. Dalam rangka memperluas materi, maka pada tahun 2022, materi diktat ini ditambahkan Bab IV tentang Graf, sebagai pelengkap materi diktat, yang membahas tentang sejarah dan istilah-istilah yang berkaitan dengan Graf sampai dengan aplikasi Graf dalam kehidupan.

Sesuai dengan judulnya, diktat ini hanya mengantarkan kepada pemahaman matematika diskrit pada beberapa pokok bahasan saja. Oleh sebab itu, agar mahasiswa dapat memahami secara keseluruhan materi Matematika Diskrit, maka disarankan agar mahasiswa mempelajari buku Matematika Diskrit dari sumber lain yang lebih lengkap. Namun demikian, dengan segala keterbatasannya, diktat ini diharapkan dapat bermanfaat bagi mahasiswa khususnya dan pembaca pada umumnya.

Bandung, Juni 2022

Penulis,

Rippi Maya

rippimaya@gmail.com

DAFTAR ISI

BAB I
INDUKSI MATEMATIK

Induksi matematik merupakan salah satu metode pembuktian yang baku di dalam matematika, yang menyatakan kebenaran dari suatu pernyataan tentang semua bilangan asli atau kadang-kadang semua bilangan bulat. Metode pembuktian ini sangat penting dalam matematika.

Beberapa Prinsip Induksi Matematik (PIM) yang perlu diketahui:

1. Sederhana
2. Yang dirampatkan (*generalized*)
3. Kuat

1.1 Prinsip Induksi Sederhana

Prinsip Induksi Sederhana

Misal $P(n)$ adalah suatu proposisi (pernyataan) tentang bilangan bulat positif. Akan dibuktikan bahwa $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan $P(n)$ benar, cukup ditunjukkan:

(i) $P(1)$ benar,

(ii) Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$,

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Tahap (i) dalam pembuktian disebut **basis induksi,** sementara tahap (ii) disebut **langkah induksi.** Asumsi yang dikemukakan dalam tahap (ii) disebut sebagai **hipotesis induksi.**

Contoh 1.1:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa:

$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti:

Misalkan $P(n): 1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, untuk semua $n \geq 1$.

Basis Induksi:

Untuk $n=1$:

Ruas kiri: $1(2)=2$, dan Ruas kanan: $\frac{1(2)(3)}{3}=2$

Karena ruas kiri = ruas kanan = 2, maka $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis induksi: Andaikan $P(n)$ benar, yaitu

$$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu:

$$1(2)+2(3)+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
1(2)+2(3)+...+n(n+1)+(n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} \\
&= \frac{(n+1)\{n(n+2)+3(n+2)\}}{3} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+6)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}
\end{aligned}$$

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ juga benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 1.2:

Dengan menggunakan induksi matematik buktikan bahwa:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\text{, untuk semua } n\geq 1.$$

Bukti:

Misalkan $P(n): 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, untuk semua $n\geq 1$.

Basis induksi:

Untuk $n=1$:

Ruas kiri: $\left(2(1)-1\right)^2=1$ dan ruas kanan: $\dfrac{1\left(2(1)-1\right)\left(2(1)+1\right)}{3}=\dfrac{1(1)(3)}{3}=1$.

Karena ruas kiri = ruas kanan = 1, maka $P(1)$ benar.

Langkah induksi

Hipotesis induksi: Andaikan $P(n)$ benar yaitu

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\ .$$

Akan dibuktikan $P(n+1)$ juga benar, yaitu

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n+1)^2=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n+1)^2&=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}+(2n+1)^2\\&=\frac{n(2n-1)(2n+1)+3(2n+1)^2}{3}\\&=\frac{(2n+1)\{n(2n-1)+3(2n+1)\}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)\{n(2n-1)+3(2n+1)\}}{3}&=\frac{(2n+1)\{2n^2+5n+3\}}{3}\\&=\frac{(2n+1)\{(n+1)(2n+3)\}}{3}\\&=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}\end{aligned}$$

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Contoh 1.3:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa $2^{2n} - 1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti:

Misalkan $P(n) : 2^{2n} - 1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Basis Induksi:

Untuk $n = 1$: $2^{2(1)} - 1 = 4 - 1 = 3$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3. Jadi $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: andaikan $P(n)$ benar, yaitu $2^{2n} - 1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$, maka terdapat $k \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $2^{2n} - 1 = 3k$.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu $2^{2(n+1)} - 1$ habis dibagi 3, untuk semua $n \geq 1$.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 1 &= 2^{2n+2} - 1 \\
&= 4.2^{2n} - 1 \\
&= (3+1)2^{2n} - 1 \\
&= 3.\left(2^{2n}\right) + \left(2^{2n} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan hipotesis induksi, $\left(2^{2n} - 1\right)$ habis dibagi 3 dan $3.\left(2^{2n}\right)$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3, sehingga jumlah $3.\left(2^{2n}\right)$ dan $\left(2^{2n} - 1\right)$ juga habis dibagi 3. Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Cara lain untuk langkah induksi:

Karena $2^{2n} - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}^+$, maka $2^{2n} = 3k + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} 2^{2(n+1)} - 1 &= 2^{2n+2} - 1 \\ &= 4.2^{2n} - 1 \\ &= 4(3k+1) - 1. \\ &= 12k + 3 \\ &= 3(4k+1) \end{aligned}$$

Karena $3(4k+1)$ adalah kelipatan 3 yang habis dibagi 3, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Contoh 1.4:

Dengan induksi matematik, buktikan bahwa $3^{2n} - 1$ habis dibagi 8, untuk semua $n \geq 1$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: $3^{2n} - 1$ habis dibagi 8, untuk semua $n \geq 1$.

Basis Induksi:

Untuk $n = 1$: $3^{2.1} - 1 = 9 - 1 = 8$ habis dibagi 8. Jadi $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Andaikan $P(n)$ benar, yaitu $3^{2n} - 1$ habis dibagi 8, untuk semua $n \geq 1$ (hipotesis induksi). Maka terdapat bilangan bulat $k \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $3^{2n} - 1 = 8k$.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar untuk semua $n \geq 1$, yaitu $3^{2(n+1)} - 1$ habis dibagi 8.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 1 &= 3^{2n+2} - 1 \\ &= 9.3^{2n} - 1 \\ &= (8+1)3^{2n} - 1 \\ &= 3.\left(3^{2n}\right) + \left(3^{2n} - 1\right) \end{aligned}$$

Berdasarkan hipotesis induksi, $\left(3^{2n} - 1\right)$ habis dibagi 8 dan $3.\left(3^{2n}\right)$ adalah kelipatan 8 yang habis dibagi 8, sehingga jumlah $3.\left(3^{2n}\right)$ dan $\left(3^{2n} - 1\right)$ juga habis dibagi 8. Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Cara lain untuk langkah induksi:

Karena $3^{2n} - 1 = 8k, k \in \mathbb{Z}^+$, maka $3^{2n} = 8k + 1$, sehingga

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 1 &= 3^{2n+2} - 1 \\ &= 9.3^{2n} - 1 \\ &= 9(8k+1) - 1. \\ &= 72k + 8 \\ &= 8(9k+1) \end{aligned}$$

Karena $8(9k+1)$ adalah kelipatan 8 yang habis dibagi 8, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$.

Soal-soal Latihan

Buktikan pernyataan berikut ini dengan menggunakan induksi matematik

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$.

2. $1 + a + a^2 + ... + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, untuk semua $n \geq 0$ dan $a \neq 1$.

3. $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1)$, $n \geq 1$.

4. $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$, $n \geq 1$.

5. $2^2 + 4^2 + ... + (2n)^2 = \left(\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}\right)^2$, $n \geq 1$.

6. (a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, untuk setiap bilangan asli *n*.

   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, untuk setiap bilangan asli *n*.

   (c) Gunakan hasil pada soal (a) dan (b) untuk menyatakan bahwa

   $$(1+2+3+...+n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3, \text{ untuk semua } n \geq 1.$$

7. $n^2 + n$ habis dibagi 2, untuk $n \geq 1$.

8. $n^3 + 2n$ habis dibagi 3, untuk $n \geq 1$.

9. $8^n - 3^n$ habis dibagi 5, untuk $n \geq 1$.

10. $5^n - 1$ habis dibagi 4, untuk $n \geq 1$.

11. $n^3 + 5n$ habis dibagi 6, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

12. $7^n - 2^n$ habis dibagi 5, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

13. $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ habis dibagi 9, untuk $n \geq 1$.

14. $10^{n+1} + 10^n + 1$ habis dibagi 3, untuk $n \geq 1$.

1.2 Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Prinsip Induksi yang Dirampatkan (*generalized*)

Misal $P(n)$ adalah proposisi (pernyataan) tentang bilangan bulat. Akan dibuktikan $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan $P(n)$ benar, cukup ditunjukkan:

(i) $P(n_0)$ benar,

(ii) Jika $P(n)$ benar, maka $P(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$,

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh 1.5:

Dengan induksi matematik buktikan bahwa $n! > 2^n$, untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Bukti:

Misal $P(n)$: $n! > 2^n$, untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Basis induksi:

Untuk n = 4: $4! = 24$ dan $2^4 = 16$, sehingga $4! > 2^4$. Jadi $P(4)$ benar.

Langkah induksi:

Andaikan $P(n)$ benar, yaitu $n! > 2^n$ untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ juga benar yaitu $(n+1)! > 2^{(n+1)}$.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1)n! \\
&> (n+1)2^n && (\text{berdasarkan hipotesis induksi}) \\
&> 2.2^n = 2^{n+1} && (\text{karena}\, n \geq 4\, \text{maka}\, (n+1) \geq 5 > 2)
\end{aligned}
$$

Jadi $(n+1)! > 2^{(n+1)}$. Dengan kata lain $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 4$.

Kesimpulan:

Karena $P(4)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 4$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 4$.

Contoh 1.6:

Buktikan bahwa $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$.

Bukti:

Misalkan $P(n)$: $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$.

Basis induksi:

Untuk $n = 5$: $\left.\begin{array}{l} 2^5 = 32 \\ 5^2 = 25 \end{array}\right\} \therefore 2^5 > 5^2$. Jadi P (5) benar.

Langkah induksi:

Andaikan $P(n)$: $2^n > n^2$, untuk $n \geq 5$ benar (hipotesis induksi)

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar, yaitu $2^{n+1} > (n+1)^2$.

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2.2^n \\
&> 2n^2 = n^2 + n^2 && \text{(berdasarkan hipotesis induksi)} \\
&\geq n^2 + 5n = n^2 + 2n + 3n && (\text{karena } n \geq 5 \Rightarrow n^2 \geq 5n) \\
&> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 && (\text{karena } n \geq 5 \Rightarrow 3n \geq 15 > 1)
\end{aligned}
$$

Jadi $2^{n+1} > (n+1)^2$. Dengan kata lain $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 5$.

Kesimpulan:

Karena $P(5)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 5$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 5$.

Contoh 1.7:

Sebuah toko buku menjual amplop dalam paket yang berisi 5 amplop dan 7 amplop. Fatimah akan membeli *n* amplop. Buktikan dengan induksi matematik bahwa untuk setiap $n \geq 24$, toko buku ini dapat memenuhi pesanan tepat *n* amplop. Asumsikan bahwa persediaan untuk setiap paket amplop tidak terbatas.

Bukti:

Misalkan $P(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa untuk membeli (memesan) amplop sebanyak *n* ($n \geq 24$), diperlukan paket amplop berisi 5 amplop dan 7 amplop.

Basis induksi:

Untuk $n = 24 \rightarrow 2(5) + 2(7) = 24$.

Artinya untuk membeli amplop sebanyak 24, diperlukan 2 paket amplop berisi 5 amplop dan 2 paket amplop berisi 7 amplop. Jadi $P(24)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: Misalkan $P(n)$ benar.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar.

Ada dua kemungkinan solusi:

1) Misalkan Fatimah akan memesan amplop sebanyak *n* amplop, maka ia sedikitnya akan menerima 1 paket amplop berisi 7 amplop. Dengan mengganti 2 paket berisi 7 amplop dengan 3 paket berisi 5 amplop akan diperoleh amplop sebanyak $n+1$ amplop.
2) Misalkan untuk memesan amplop sebanyak *n* amplop ($n \geq 24$), tidak ada paket amplop berisi 5 amplop, hanya paket amplop berisi 7 amplop yang tersedia. Maka dengan mengganti 4 paket amplop berisi 5 amplop dengan 3 paket amplop berisi 7 amplop, akan diperoleh amplop sebanyak $n+1$ amplop.

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 24$.

Kesimpulan:

Karena $P(24)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 24$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 24$. Jadi untuk memesan amplop sebanyak n amplop, cukup dilakukan dengan memesan paket yang berisi 5 amplop dan amplop saja.

Contoh 1.8:

Untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 8)$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen saja. Buktikan pernyataan tersebut dengan induksi matematik.

Bukti:

Misal: $P(n)$: untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 8)$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 5 sen.

Basis Induksi:

Untuk $n = 8$: $8 = 1(3) + 1(5)$. Artinya untuk membayar perangko senilai 8 sen dapat digunakan 1 perangko 3 sen dan 1 perangko 5 sen. Jadi $P(8)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: Andaikan $P(n)$ benar.

Akan dibuktikan $P(n+1)$ benar.

Ada dua kemungkinan solusi:

1) Misalkan kita bayar biaya pos senilai n sen dengan sedikitnya 1 perangko 5 sen. Dengan mengganti 1 perangko 5 sen dengan 2 perangko 3 sen akan diperoleh biaya pos senilai $n + 1$.
2) Misalkan untuk biaya pos senilai n sen ($n \geq 8$) dengan sedikitnya 3 perangko 3 sen. Dengan mengganti 3 perangko 3 sen dengan 2 perangko 5 sen akan diperoleh biaya pos sebesar $n + 1$ sen.

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 8$.

Kesimpulan:

Karena $P(8)$ dan $P(n+1)$ terbukti benar untuk setiap $n \geq 8$, maka $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 8$. Jadi untuk semua $n \geq 8$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan 5 sen untuk membayar biaya pos.

Soal-soal Latihan

1. Sebuah kios penukaran uang hanya mempunyai pecahan uang senilai Rp. 2000,00 dan Rp. 5.000,00. Untuk uang senilai berapa saja yang dapat ditukar dengan kedua pecahan uang tersebut? Buktikan kebenaran jawaban anda dengan menggunakan induksi matematik.
2. Buktikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 20)$ selalu dapat digunakan perangko 5 sen dan perangko 6 sen saja.
3. Buktikan bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 14)$ selalu dapat digunakan perangko 3 sen dan perangko 8 sen saja.

Dengan induksi matematik, buktikan kebenaran pernyataan berikut ini:

4. $1 + 2^n < 3^n$, untuk n $\geq$ 2.
5. $3^n < n!$, untuk $n > 6$
6. $2^n > n^3$ untuk $n \geq 10$.

1.3 Prinsip Induksi Kuat

Prinsip Induksi Kuat

Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan tentang bilangan bulat. Akan dibuktikan $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini cukup ditunjukkan:

(i) $P(n_0)$ benar,

(ii) Jika $P(n_0), P(n_0 + 1), \ldots, P(n)$ benar maka $P(n + 1)$ juga benar, untuk setiap bilangan bulat $n \geq n_0$,

sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Catatan:

Induksi kuat mirip induksi yang dirampatkan. Perbedaannya terdapat pada langkah (ii). Induksi kuat mengambil hipotesis yang lebih kuat, yaitu: $P(1), P(2), \dots, P(n)$ benar. Prinsip ini memungkinkan kita mencapai kesimpulan yang sama meskipun memberlakukan pengandaian yang lebih banyak.

Contoh 1.9:

Gunakan induksi kuat untuk membuktikan bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ adalah bilangan prima atau merupakan hasil kali bilangan prima.

Bukti:

Misalkan $P(n)$ adalah proposisi bahwa setiap bilangan asli $n \geq 2$ adalah bilangan prima atau merupakan hasil kali bilangan prima.

Basis Induksi:

Untuk $n_0 = 2$, maka pernyataan di atas benar karena 2 adalah bilangan prima.

Langkah Induksi:

Hipotesis induksi:

Andaikan $P(2), P(3), ..., P(n)$ benar. Artinya bahwa setiap bilangan asli tersebut (2, 3, …, n) merupakan bilangan prima atau merupakan hasil kali bilangan prima.

Akan ditunjukkan: $n + 1$ juga merupakan bilangan prima atau hasil kali bilangan prima.

Ada dua kasus yang perlu dibuktikan, yaitu jika $n + 1$ prima atau $n + 1$ bukan prima:

- Jika $n + 1$ prima, maka jelas pernyataan benar
- Jika $n+1$ bukan prima, maka $n+1$ dapat difaktorkan, yaitu $n+1 = ab$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}^+$ yang memenuhi $2 \leq a, b < n+1$.

Berdasarkan hipotesis induksi, a dan b merupakan bilangan prima atau merupakan hasil kali bilangan prima, sehingga $n + 1$ juga merupakan hasil kali prima. Jadi, setiap bilangan asli $n \geq 2$ adalah bilangan prima atau merupakan hasil kali prima.

Contoh 1.10:

Gunakan prinsip induksi kuat untuk membuktikan bahwa untuk menyelesaikan suatu puzzle dengan n potongan, diperlukan $n - 1$ langkah.

Bukti:

Misalkan $P(n)$ adalah proposisi yang menyatakan bahwa untuk menyelesaikan suatu *puzzle* dengan n potongan, diperlukan $n - 1$ langkah.

Basis Induksi:

Untuk puzzle dengan 1 potongan tidak diperlukan cara menyelesaikannya. Jadi $P(1)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: andaikan $P(1), P(2), P(3), ..., P(n)$ benar. Artinya untuk menyelesaikan *puzzle* dengan $n_0 = 1, 2, 3, \ldots, n$ potongan diperlukan $n - 1$ langkah.

Akan ditunjukkan bahwa puzzle dengan $n + 1$ potongan memerlukan n langkah untuk menyelesaikannya.

Bagi $n + 1$ potongan menjadi dua bagian yaitu n_1 dan n_2 bagian, sehingga $n_1 + n_2 = n + 1$.

Menurut hipotesis induksi:

- untuk menyelesaikan puzzle dengan n_1 potongan diperlukan $n_1 - 1$ langkah,
- untuk menyelesaikan puzzle dengan n_2 potongan diperlukan $n_2 - 1$ langkah.

Apabila kedua langkah tersebut digabungkan dengan satu langkah terakhir untuk menyatukannya, maka diperoleh:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = (n + 1) - 1 = n.$$

Jadi $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Kesimpulan:

Karena $P(1)$ dan $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$, maka $P(n)$ benar untuk setiap bilangan positif n. Dengan kata lain, untuk menyelesaikan *puzzle* dengan n potongan diperlukan $n - 1$ langkah.

Contoh 1.11:

Buktikan dengan induksi kuat bahwa untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 12)$ selalu dapat digunakan perangko 4 sen dan atau perangko 5 sen saja.

Bukti:

Misal: (n) : untuk membayar biaya pos sebesar n sen $(n \geq 12)$ selalu dapat digunakan perangko 4 sen dan atau perangko 5 sen.

Basis Induksi:

Untuk $n = 12 \rightarrow 12 = 3(4)$. Artinya untuk membayar perangko senilai 12 sen dapat digunakan 3 perangko 4 sen. Jadi $P(12)$ benar.

Langkah Induksi:

Hipotesis Induksi: Andaikan $P(12), P(13), P(14), \ldots, P(n)$ benar

$P(12) \rightarrow 12 = 3(4) = 4 + 4 + 4$

$P(13) \rightarrow 13 = 2(4) + 5 = 4 + 4 + 5$

$P(14) \rightarrow 14 = 1(4) + 2(5) = 4 + 5 + 5$

$P(15) \rightarrow 15 = 3(5) = 5 + 5 + 5$

$P(16) \rightarrow 16 = 4(4) = 4 + 4 + 4 + 4$

$P(17) \rightarrow 17 = 3(4) + 5 = 4 + 4 + 4 + 5$

$\ldots\ldots$

$P(n) \rightarrow n = k(4) + l(5)$ dengan $k, l \in \square^{+}$.

Akan dibuktikan bahwa $P(n+1)$ benar.

Berdasarkan hipotesis induksi, diperoleh pola penggantian perangko, yaitu 1 perangko 4 sen dapat diganti dengan 1 perangko 5 sen atau 3 perangko 5 sen diganti dengan 4 perangko 4 sen, sehingga diperoleh biaya pos senilai $n + 1$ sen.

Jadi $P(n + 1)$ benar untuk setiap $n \geq 8$.

Kesimpulan:

Karena $P(12)$ dan $P(n + 1)$ benar untuk setiap $n \geq 8$, maka $P(n)$ benar untuk semua $n \geq 8$.

1.4 Bentuk Induksi Secara Umum

Agar induksi matematik dapat digunakan untuk pembuktian yang berkaitan dengan bilangan atau obyek secara umum, tidak hanya berkaitan dengan bilangan bulat positif saja, maka dibuat bentuk induksi secar umum. Syaratnya, himpunan bilangan atau obyek tersebut harus mempunyai keterurutan dan elemen terkecil. Berikut ini adalah definisi terurut dengan baik.

Definisi 1.1: Terurut dengan baik (*Well Ordering Principle*)

Relasi biner “ $<$ ” pada himpunan R dikatakan **terurut dengan baik**, jika:

1. Diberikan $x, y, z \in R, x < y$ dan $y < z \rightarrow x < z$ (sifat transitif)
2. Diberikan $x, y \in R: x < y$ atau $y < x$ atau $x = y$,
3. Jika A himpunan bagian tidak kosong dari R, terdapat elemen $x \in A$ sedemikian sehingga $x \leq y$ untuk semua $y \in A$.

Dengan kata lain, setiap himpunan bagian tidak kosong R memuat elemen terkecil.

Dari definisi terurut dengan baik tersebut, didefinisikan induksi secara umum.

Definisi 1.2: Induksi secara umum

Misal: X terurut dengan baik oleh “ $<$ ”.

$P(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X.

Untuk membuktikan $P(x)$ benar untuk semua $x \in X$, cukup ditunjukkan:

1. $P\ (x_0)$ benar, dengan x_0 adalah elemen terkecil dalam X,
2. jika $P(y)$ benar untuk $y < x$, maka $P(x)$ juga benar untuk setiap $x > x_0$ dalam X,

sehingga $P(x)$ benar untuk semua $x \in X$.

Contoh 1.12:

Perhatikan barisan bilangan bulat yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } m = 0 \text{ dan } n = 0 \\ S_{m-1,n} + 1 & \text{jika } n = 0 \\ S_{m,n-1} + 1 & \text{jika } n \neq 0 \end{cases}$$

Contoh barisan bilangan

$S_{0,0} = 0$

$S_{1,0} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$ $\quad$ $S_{0,2} = S_{0,1} + 1 = 1 + 1 = 2$

$S_{2,0} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 2$ $\quad$ $S_{0,3} = S_{0,2} + 1 = 2 + 1 = 3$

$S_{3,0} = S_{2,0} + 1 = 2 + 1 = 3$ $\quad$ $S_{1,1} = S_{1,0} + 1 = 1 + 1 = 1$

$S_{0,1} = S_{0,0} + 1 = 0 + 1 = 1$ $\quad$ $S_{2,1} = S_{2,0} + 1 = 2 + 1 = 3$

Buktikan dengan induksi matematik, bahwa untuk pasangan tak negatif *m* dan *n*, berlaku $S_{m,n} = m + n$.

Bukti:

Misalkan $P(x)$ adalah pernyataan yang berkaitan dengan $S_{m,n}$ yang didefinisikan pada soal di atas.

Basis Induksi:

$x_0 = (0,0)$ adalah elemen terkecil di dalam *X,* sehingga $P(x_0) = S_{0,0}$. $S_{0,0} = 0 + 0 = 0$, sedangkan berdasarkan definisi $S_{0,0} = 0$.

Jadi $P(x_0)$ benar.

Langkah Induksi:

Misalkan $P(y) = S_{m',n'}$ dan $P(x) = S_{m,n}$.

Andaikan $S_{m',n'} = m' + n'$ benar untuk semua $(m', n') < (m, n)$ (*Hipotesis Induksi*).

Akan dibuktikan bahwa $S_{m,n} = m + n$ juga benar untuk semua $(m,n) > (0,0)$ di *X*. Dengan kata lain, berdasarkan definisi di atas akan ditunjukkan bahwa $S_{m,n} = m + n$, baik untuk $n = 0$ atau $n \neq 0$.

Kasus I:

Jika $n = 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1$.

Karena $(m-1, n) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi $S_{m-1,n} = (m-1) + n$, sehingga $S_{m,n} = S_{m-1,n} + 1 = (m-1) + n + 1 = m + n$. Jadi $S_{m,n} = P(x)$ benar.

Kasus II:

Jika $n \neq 0$, maka dari definisi $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1$.

Karena $(m, n-1) < (m, n)$ maka dari hipotesis induksi $S_{m,n-1} = m + (n-1)$, sehingga $S_{m,n} = S_{m,n-1} + 1 = m + (n-1) + 1 = m + n$. Jadi $S_{m,n} = P(x)$ benar.

Dari kasus I dan II disimpulkan bahwa $S_{m,n} = m + n$ benar untuk (m,n) di X.

Kesimpulan:

Karena $P(x_0) = S_{0,0}$ dan $P(x) = S_{m,n}$ benar maka terbukti bahwa $S_{m,n} = m + n$ benar untuk semua pasangan tak negatif *m dan n*.

Latihan 1.14:

Perhatikan barisan bilangan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S_{m,n} = \begin{cases} S_{1,1} = 5 \\ S_{m-1,n} + 2 \text{ jika } n = 1 \\ S_{m,n-1} + 2 \text{ jika } n \neq 1 \end{cases}$$

Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua pasangan bilangan bulat positif (m, n) berlaku $S_{m,n} = 2(m+n) + 1$.

BAB 2

REKURSI

2.1 Barisan yang Terdefinisi secara Rekursif

Misalkan n adalah bilangan asli. 2^n dapat ditulis sebagai $2^n = \underbrace{2.2.2...2}_{n}$.

Dengan kata lain, $2^1 = 2$ dan untuk $k \geq 1$, $2^k = 2.2^k$ …. (i)

Pernyataan (i) tersebut merupakan salah satu contoh dari **definisi rekursif**. Pernyataan tersebut dengan jelas menyatakan definisi 2^n, jika $n = 1$. Kemudian dengan mengasumsikan 2^n terdefinisi untuk $n = k$, maka akan didefinisikan untuk $n = k + 1$. Berdasarkan Prinsip Induksi Matematik (PIM), 2^n telah terdefinisi untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$. …..

Contoh lain dari defnisi rekursif adalah:

$$0! = 1 \text{ dan untuk } k \geq 0, \quad (k+1)! = (k+1).k!$$

yang berdasarkan PIM, $n!$ telah terdefinisi untuk setiap $n \geq 0$.

Barisan bilangan-bilangan sering didefinisikan secara rekursif. Barisan adalah fungsi-fungsi yang domainnya merupakan himpunan bulat tak berhingga (sering dinyatakan dengan $\mathbb{N}$) dan yang daerah hasilnya (*range*) merupakan himpunan bilangan real. Karena domainnya dapat dihitung, maka biasanya suatu barisan dinyatakan dengan menyebutkan daerah hasilnya. Sebagai contoh, barisan di mana fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(n) = n^2$, biasanya secara umum dinyatakan oleh $1, 4, 9, 16, ...$ Bilangan-bilangan dalam barisan tersebut dinyatakan sebagai **suku-suku barisan** (*the terms of the sequence*). Barisan $2, 4, 8, 16, ...$ dapat didefinisikan secara rekursif sebagai:

$$a_1 = 2 \text{ dan untuk } k \geq 1, \ a_{k+1} = 2a_k. \text{….. (ii)}$$

Bila dijabarkan, $a_2 = 2a_1 = 2(2) = 4$, $a_3 = 2a_2 = 2(4) = 8$, $a_4 = 2a_3 = 2(8) = 16$, dan seterusnya. $a_{k+1} = 2a_k$ disebut **relasi rekurensi** dan $a_1 = 2$ disebut **kondisi awal.**

Definisi rekursif lain yang mungkin untuk barisan (ii) adalah

$$a_0 = 2 \text{ dan untuk } k \geq 0,\ a_{k+1} = 2a_k$$

Atau

$$a_1 = 2 \text{ dan untuk } k \geq 2,\ a_k = 2a_{k-1}.$$

Setelah menyebutkan beberapa suku barisan, dapat diduga rumus umum untuk a_n. . Untuk contoh di atas, rumus umumnya adalah $a_n = 2^n$, dan ini disebut sebagai **solusi relasi rekurensi**.

Contoh:

1. Tuliskan enam suku pertama dari barisan yang didefinisikan oleh

$$a_1 = 1,\ a_{k+1} = 3a_k + 1, \text{ untuk } k \geq 1.$$

Perkirakan rumus untuk a_n dan buktikan dengan PIM bahwa rumusmu benar.

Jawab:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1, \\
&a_2 = 3a_1 + 1 = 3(1) + 1 = 4, \\
&a_3 = 3a_2 + 1 = 3(4) + 1 = 13, \\
&a_4 = 3a_3 + 1 = 3(13) + 1 = 40, \\
&a_5 = 3a_4 + 1 = 3(40) + 1 = 121, \\
&a_6 = 3a_5 + 1 = 3(121) + 1 = 364.
\end{aligned}$$

Menurut dugaan, rumus untuk barisan di atas adalah $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

Bukti dengan PIM:

Untuk $n=1$, $\frac{1}{2}\left(3^1-1\right)=1=a_1$ (benar).

Untuk $k\geq 1$, $a_k=\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)$ diasumsikan benar.

Akan dibuktikan $a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)$ benar.

Berdasarkan definisi relasi rekurensi,

$$a_{k+1}=3a_k+1=3\left[\frac{1}{2}\left(3^k-1\right)+1\right]=\frac{3}{2}\left(3^k\right)-\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}\left(3^{k+1}-1\right)$$ ….. terbukti.

2. Suatu barisan didefinisikan oleh

$$a_0=1,\ a_1=4 \text{ dan } a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2},\ n\geq 2$$

Tuliskan enam suku pertama dari barisannya. Perkirakan rumus untuk a_n dan periksa keabsahan dugaanmu.

Jawab:

$$\begin{aligned}
&a_0=1,\ a_1=4,\\
&a_2=4a_1-4a_0=4(4)-4(1)=12,\\
&a_3=4a_2-4a_1=4(12)-4(4)=32,\\
&a_4=4a_3-4a_2=4(32)-4(12)=80,\\
&a_5=4a_4-4a_3=4(80)-4(32)=192.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
a_3&=32=24+8=3(8)+8=4(8)\\
a_4&=80=64+16=4(16)+16=5(16)\\
a_5&=192=160+32=5(32)+32=6(32)
\end{aligned}$$

Dugaannya adalah $a_n=\left(n+1\right).2^n$.

Bukti:

Untuk $n=0$, $(0+1)2^0=1(1)=1=a_0$ benar

Untuk $n=1$, $(1+1)2^1=4=a_1$ benar

Asumsikan bahwa untuk k > 1, dan $a_n = (n+1)2^n$, untuk semua n dalam selang $0 \le n < k$. Akan dibuktikan rumus benar untuk n = k, yaitu $a_k = (k+1)2^k$. Karena $k \ge 2$ dan dari definisi $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2}$, maka dengan menerapkan hipotesis induksi untuk k - 1 dan k – 2 ($0 \le n < k$), diperoleh $a_{k-1} = k\left(2^{k-1}\right)$ dan $a_{k-2} = \left(k-1\right)2^{k-2}$, sehingga

$$\begin{aligned} a_k &= 4\left(k.2^{k-1}\right) - 4\left(k-1\right)2^{k-2} \\ &= 2k.2^k - k.2^k + 2^k = k.2^k + 2^k = \left(k+1\right)2^k \quad \left(\text{terbukti}\right). \end{aligned}$$

Jadi berdasarkan PIM, rumusnya berlaku untuk semua $n \ge 0$.

Perhatikan bahwa dari definisi

$$a_0 = 1, a_1 = 4, \text{dan untuk } n \ge 1,\ a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}.$$

diperoleh rumus $a_n = \left(n+1\right)2^n$.

Dan dari definisi

$$a_1 = 1, a_2 = 4, \text{ dan untuk } n \ge 1,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,$$

diperoleh rumus

1. Barisan Aritmetika

Definisi:

Barisan aritmetika dengan suku pertama a dan selisih d, adalah barisan yang didefinisikan oleh

$$a_1 = a, \text{ dan untuk } k \ge 1,\ a_{k+1} = a_k + d$$

Barisan aritmetika umum mempunyai bentuk:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ...$$

Sehingga untuk $n \ge 1$, suku ke-n barisan adalah

$$\boxed{a_n = a + (n-1)\,d}$$

Jumlah n suku barisan aritmetika dengan suku pertama a dan selisih d adalah

$$\boxed{S = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)}$$

Contoh:

100 suku pertama dari barisan -17, -12, -7, -2, 3, … mempunyai jumlah

$$S = \frac{100}{2}\left[2(-17) + 99(5)\right] = 50(-34 + 495) = 23.050$$

Dan suku ke-100 adalah $a_{100} = -17 + 99(5) = 478$.

Jika diketahui bilangan 2038 termasuk salah satu suku barisan tersebut, maka dapat ditentukan suku ke berapa bilangan 2038 tersebut:

$$\begin{aligned} &a_n = -17 + (n-1)5 = 2038 \\ &-17 + 5n - 5 = 2038 \\ &5n = 2038 + 22 = 2060 \Rightarrow n = 412 \end{aligned}$$

Jadi bilangan 2038 merupakan suku ke-412 dari barisan tersebut.

2. Barisan Geometri

Definisi:

Barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah barisan yang didefinisikan oleh

$$a_1 = a \text{ dan untuk } k \geq 1,\ a_{k+1} = r.a_k\ .$$

Barisan geometri secara umum mempunyai bentuk

$a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^n, ...$ dan suku ke-n adalah $\boxed{ar^{n-1}}$ ..

Jumlah n suku barisan geometri, dengan $r \neq 1$ adalah

$$\boxed{S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$$

Contoh:

1. Jumlah 29 suku barisan geometri dengan $a = 8^{12}$ dan $r = -\frac{1}{2}$ adalah

$$S = 8^{12}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{29}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right] = 2^{36}\left[\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{29}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2^{36}+2^{7}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\left(2^{37}+2^{8}\right).$$

Suku ke-30 dari barisan geometri tersebut adalah

$$a_{30} = 8^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{29} = 2^{36}\left(-2^{-29}\right) = -2^{7}$$

3. Barisan Fibonacci

Sekilas tentang asal usul barisan Fibonacci.

Leonardo Fibonacci/Leonardo of Pisa (1180-1228) adalah salah seorang matematikawan terkemuka yang mencetuskan barisan Fibonacci, yang berkaitan dengan pertumbuhan kelinci. Misalkan kelinci yang baru lahir mempunyai keturunan pada akhir bulan ke-dua kehidupannya. Setelah masa itu, mereka menghasilkan sepasang kelinci setiap bulan (satu jantan, satu betina). Dengan asumsi bahwa pada awalnya ada satu pasang kelinci, maka berapa kelinci yang hidup setelah 1 tahun? Barisan yang menyatakan banyaknya pasangan kelinci pada akhir bulan, disebut **Barisan Fibonacci**.

Setelah 1 bulan, hanya ada 1 pasang kelinci, tetapi pada bulan-bulan berikutnya, pasangan ini bertambah dengan kelahiran keturunan-keturunannya, sehingga setelah 2 bulan, ada 2 pasang kelinci. Pada akhir bulan tertentu, banyaknya pasangan kelinci adalah banyaknya kelinci yang hidup pada akhir bulan sebelumnya ditambah banyaknya pasangan yang hidup 2 bulan yang lalu, karena setiap pasangan yang hidup dua bulan yang lalu, menghasilkan sepasang keturunan. Barisannya dinyatakan sebagai berikut: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

$$\boxed{f_1 = 1, f_2 = 1, \text{dan untuk } k \geq 2,\ f_{k+1} = f_k + f_{k-1}.}$$

Suku ke-n dari barisan Fibonacci adalah bilangan bulat yang terdekat dengan bilangan $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Beberapa nilainya adalah 0,72361; 1,17082; 1,89443; 3,06525; 4,95967; 8,02492; 12,98460 dan 21,00952. Bilangan bulat yang terdekat dengan bilangan-bilangan tersebut adalah 8 suku pertama dari barisan Fibonacci, yang sudah disebutkan sebelumnya.

Perlu diperhatikan bahwa barisan yang kelihatannya terdefinisi secara rekursif, ternyata tidak mendefinisikan barisan yang sebenarnya, sebagaimana terlihat dalam contoh berikut ini.

Contoh:

Perhatikan definisi rekursif berikut ini:

$$a_1 = 1, \text{dan untuk } k > 1,\ a_k = \begin{cases} 1 + a_{k/2}, \text{ jika } k \text{ genap} \\ 1 + a_{3k-1}, \text{ jika } k \text{ ganjil} \end{cases}.$$

Bila diuraikan relasi rekurensinya, maka diperoleh suku-suku barisan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1,\ a_2 = 1 + a_1 = 1 + 1 = 2. \\
a_3 &= 1 + a_8 = 1 + (1 + a_4) = 2 + a_4 = 2 + (1 + a_2) = 3 + a_2 = 5. \\
a_4 &= 1 + a_2 = 3. \\
a_5 &= 1 + a_{14} = 1 + (1 + a_7) = 2 + a_7 = 2 + (1 + a_{20}) \\
&= 3 + a_{20} = 3 + (1 + a_{10}) = 4 + a_{10} \\
&= 4 + (1 + a_5) \\
&= 5 + a_5 \quad \text{(tidak mungkin } 0 = 5)
\end{aligned}$$

Jadi tidak ada barisan yang telah didefinisikan.

Latihan:

1. Tuliskan 6 suku pertama dari barisan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a_1 = 1 \text{ dan untuk } k > 1,\ a_k = \begin{cases} 1 + a_{k/2}, \text{ jika } k \text{ genap} \\ 1 + a_{3k+1}, \text{ jika } k \text{ ganjil} \end{cases}.$$

2. Berikan definisi rekursif untuk barisan-barisan berikut ini:

   a. $1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, ...$

   b. $5, 3, 1, -1, -3, ...$

   c. $4, 1, 3, -2, 5, -7, 12, -19, 31, ...$

   d. $1, 2, 0, 3, -1, 4, -2, ...$

2.2 Solusi Rekurensi: Polinom Karakteristik

Dalam sub bab ini akan dibahas prosedur untuk penyelesaian relasi rekurensi yang berbentuk:

$$\boxed{a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n),} \quad \text{........ (i)}$$

Dengan r dan s konstanta, $f(n)$ adalah fungsi dari n. Relasi rekurensi tersebut dikenal sebagai **relasi rekurensi linier orde ke-dua dengan koefisien konstanta**. Jika $f(n) = 0$, maka relasinya disebut **homogen**. Orde ke-dua merujuk pada definisi relasi rekurensi yang menyatakan bahwa a_n sebagai fungsi dari dua suku yang mendahuluinya.

Contoh 1:

Berikut ini adalah beberapa contoh relasi rekurensi linier orde ke-dua dengan koefisien konstanta.

1. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, yaitu relasi rekurensi yang muncul dalam definisi barisan Fibonacci. Relasi ini homogen dengan $r = s = 1$. Perhatikan bahwa relasi rekurensi tersebut merupakan modifikasi dari bentuk $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, seperti pada definisi barisan Fibonacci.
2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + n$, dengan $r = 5$, dan $s = -6$ dan $f(n) = n$.
3. $a_n = 3a_{n-1}$. Ini relasi homogen dengan $r = 3$, dan $s = 0$.

Contoh 2:

Perhatikan dua relasi rekurensi berikut:

1. $a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-3}$. Ini bukan relasi rekurensi orde ke-dua.
2. $a_n = a_{n-1}.a_{n-2} + n^2$. Ini relasi rekurensi yang tidak linier.

Relasi rekurensi homogen $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ dapat ditulis dalam bentuk $a_n - r.a_{n-1} - s.a_{n-2} = 0,$ yang berkaitan dengan polinom kuadrat: $x^2 - rx - s$, yang disebut **polinom karakteristik dari relasi rekurensi**.

Contoh:

Relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ mempunyai polinom karakteristik $x^2 - 5x + 6$ dan akar-akar karakteristik 2 dan 3.

Teorema:

Misalkan $x_1 \text{ dan } x_2$ adalah akar-akar polinom $x^2 - rx - s$. Maka solusi dari relasi rekurensi $a_n = r.a_{n-1} + s.a_{n-2}$, $n \geq 2$ adalah $\begin{cases} a_n = c_1 x_1^{\,n} + c_2 x_2^{\,n}, \text{ jika } x_1 \neq x_2 \\ a_n = c_1 x_1^{\,n} + c_2\, n\, x_2^{\,n}, \text{ jika } x_1 = x_2 = x \end{cases}$.

Pada masing-masing kasus, $c_1 \text{ dan } c_2$ adalah konstanta yang ditentukan oleh kondisi awal.

Latihan 1:

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ n \geq 2,$ bila diketahui $a_0 = 1,\ a_1 = 4$.

Latihan 2:

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2,$ dengan kondisi awal $a_0 = 1,\ a_1 = 4$.

Latihan 3:

Tentukan rumus suku ke-*n* dari barisan Fibonacci, bila diketahui kondisi awalnya $a_0 = a_1 = 1$ bukan $a_1 = a_2 = 1$.

Perhatikan bentuk umum relasi rekurensi orde ke-dua:

$$a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n) \text{ ……. (i).}$$

Misalkan diperoleh satu solusi khusus p_n dari relasi rekurensi di atas, maka

$$p_n = rp_{n-1} + sp_{n-2} + f(n) \text{ ……. (ii)}$$

Misalkan t_n adalah solusi lain dari relasi rekurensi (i) di atas, maka

$$t_n = rt_{n-1} + st_{n-2} + f(n) \text{ ….. (iii)}$$

Dengan mengurangkan persamaan (iii) dengan (ii), diperoleh

$$t_n - p_n = r(t_{n-1} - p_{n-1}) + s(t_{n-2} - p_{n-2}) \text{ …. (iv).}$$

Persamaan (iv) ini menunjukkan bahwa $t_n - p_n$ memenuhi relasi rekurensi homogen $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$. Tulis $t_n - p_n = q_n$, maka $t_n = p_n + q_n$, dengan p_n adalah **solusi khusus** dari persamaan (i) dan q_n memenuhi relasi rekurensi homogen yang berkaitan.

Teorema:

Misalkan p_n adalah solusi khusus untuk relasi rekurensi $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$, dengan kondisi awalnya diabaikan. Misalkan q_n adalah solusi untuk relasi rekurensi homogen $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$, dengan kondisi awal diabaikan. Maka $p_n + q_n$ adalah solusi untuk relasi rekurensi $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$. Kondisi awal menentukan konstanta-konstanta di q_n.

Contoh:

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = -3a_{n-1} + n,\ n \geq 1,$ dengan $a_0 = 1.$

Jawab:

I. Mencari solusi khusus p_n

Karena $f(n) = n$ linier, maka pilih p_n fungsi linier, yaitu $p_n = a + bn$, dengan *a* dan *b* akan ditentukan. Substitusikan *a* + *bn* ke dalam relasi rekurensi yang diketahui sehingga diperoleh:

$$a + bn = -3\left[a + b(n-1)\right] + n = -3a + 3b + (1-3b)n\ .$$

Dengan demikian, $a = -3a + 3b$ dan $b = 1 - 3b$, sehingga diperoleh

$$\left.\begin{array}{l} 4a - 3b = 0 \Rightarrow 4a = 3b \\ 4b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} 4a = 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{16}.$$

Jadi $p_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n$ adalah solusi khusus untuk relasi rekurensi tersebut, dengan mengabaikan kondisi awal.

II. Mencari solusi homogen q_n

Relasi rekurensi homogen yang berkaitan dengan kasus ini adalah $a_n = -3a_{n-1}$, yang polinom karakteristiknya adalah $x^2 + 3x$, dengan akar-akar karakteristiknya adalah -3 dan 0.

Jadi solusi relasi rekurensi homogennya adalah

$$q_n = c_1(-3)^n + c_2(0)^n = c_1(-3)^n$$

III. Menerapkan kondisi awal untuk memperoleh solusi nonhomogen $a_n = p_n + q_n$

Dari solusi khusus p_n dan homogen q_n yang diperoleh, dapat ditentukan solusi relasi nonhomogennya, yaitu $a_n = p_n + q_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + c_1(-3)^n$.

Karena $a_0 = 1$, maka

$$a_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}(0) + c_1(-3)^0 = 1 \Rightarrow \frac{3}{16} + c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{13}{16}.$$

Jadi solusinya adalah $a_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + \frac{13}{16}(-3)^n$. □

Latihan:

Selesaikan $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5^n,\ n \geq 2,$ dengan $a_0 = -2,\ a_1 = 1$.

Jawab:

I. **Mencari solusi khusus** p_n

Karena $f(n) = 5^n$, maka pilih $p_n = 5^n$. Substitusikan p_n tersebut ke dalam persamaan rekurensi yang ada, sehingga diperoleh .

$$\begin{aligned}
p(n) &= 2p_{n-1} + 3p_{n-2} + 5^n \\
a(5^n) &= 2a(5^{n-1}) + 3a(5^{n-2}) + 5^n \\
&= \frac{2a(5^n)}{5} + \frac{3a(5^n)}{25} + 5^n \\
&= 5^n\left(\frac{10a + 3a + 25}{25}\right)
\end{aligned}$$

Karena $5^n \neq 0$, maka

$$25a = 10a + 3a + 25$$
$$12a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{12} \Rightarrow p_n = \frac{25}{12}(5^n).$$

Jadi solusi khusus $p_n = \frac{25}{12}(5^n)$.

II. **Mencari solusi relasi rekurensi homogen**: q_n

Dari relasi rekurensi homogen $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, maka dapat ditentukan polinom karakteristik yaitu $x^2 - 2x - 3$, yang mempunyai akar-akar karakteristik: -1 dan 3.

Jadi solusi homogennya adalah $q_n = c_1(-1)^n + c_2(3)^n$.

III. **Menerapkan kondisi awal untuk menentukan solusi relasi rekurensi nonhomogen** $a_n = p_n + q_n$

Berdasarkan teorema, relasi rekurensi yang diketahui mempunyai solusi

$$a_n = q_n + p_n = \frac{25}{12}\left(5^n\right) + c_1(-1)^n + c_2(3)^n.$$

Dari kondisi awal $a_0 = -2$ diperoleh

$$a_0 = -2 = \frac{25}{12}\left(5^0\right) + c_1(-1)^0 + c_2(3)^0$$
$$\frac{25}{12} + c_1 + c_2 = -2 \Rightarrow c_1 + c_2 = -2 - \frac{25}{12} = -\frac{49}{12}$$

Dari kondisi awal $a_0 = 1$ diperoleh

$$a_1 = 1 = \frac{25}{12}\left(5^1\right) + c_1(-1)^1 + c_2\left(3^1\right)$$
$$\frac{25}{12}(5) - c_1 + 3c_2 = 1 \Rightarrow -c_1 + 3c_2 = 1 - \frac{125}{12} = -\frac{113}{12}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi, diperoleh hasil $c_1 = -\frac{17}{24}$ dan $c_2 = \frac{-27}{8}$, sehingga solusi relasi rekurensi linier orde ke-dua adalah

$$a_n = \frac{25}{12}\left(5^n\right) - \frac{17}{24}(-1)^n - \frac{27}{8}(3)^n.$$

Latihan:

I. Carilah solusi relasi rekurensi homogen berikut:

1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2},\ n \geq 2,$ jika diketahui $a_0 = 1, a_1 = 3.$
2. $a_n = -6a_{n-1} + 7a_{n-2},\ n \geq 2,$ jika diketahui $a_0 = 32, a_1 = -17.$
3. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2},\ n \geq 2,$ jika diketahui $a_0 = -5, a_1 = 3.$
4. $9a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2,$ jika diketahui $a_0 = 3, a_1 = -1.$

II. Carilah solusi relasi rekurensi nonhomogen berikut:

1. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n,\ n \geq 2$, diketahui $a_0 = 5, a_1 = 9$
2. $a_n = 4a_{n-1} + 8^n,\ n \geq 1$, diketahui $a_0 = 1$.
3. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 3n,\ n \geq 2$, diketahui $a_0 = 2, a_1 = 14$
4. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n^2 + 3n,\ n \geq 2$, diketahui $a_0 = \frac{179}{128},\ a_1 = \frac{-21}{128}$
5. $a_n = 5a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3n^2,\ n \geq 2$, diketahui $a_0 = 0, a_1 = 3$

2.3 Solusi Relasi Rekurensi: Fungsi Pembangkit

Fungsi Pembangkit adalah suatu polinom yang berlangsung selamanya (*goes on forever*), yaitu sebuah ekspresi dalam bentuk

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n + ...$$

Tidak seperti polinom pada umumnya, di mana koefisien a_i semuanya nol setelah titik tertentu, fungsi pembangkit biasanya mempunya tak hingga banyaknya suku tak nol. Ada kaitan yang jelas antara fungsi pembangkit dengan barisan $a_1, a_2, a_3, ...$, sebut saja

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... \leftrightarrow a_0, a_1, a_2, a_3, ...$$

Definisi:

Fungsi pembangkit dari suatu barisan $a_1, a_2, a_3, ...$ adalah ekspresi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$

Contoh:

Fungsi pembangkit dari barisan 1, 2, 3, … bilangan asli adalah $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + ...$, sementara fungsi pembangkit dari barisan aritmetik 1,4,7,10, … adalah $f(x) = 1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + ...$

Fungsi pembangkit dapat dijumlahkan dan dikalikan suku demi suku seperti pada polinom. Jika $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$ maka

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ...$$

$$f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ...$$

Catatan:

Meski fungsi pembangkit mempunyai takberhingga banyaknya suku, namun definisi penjumlahan dan perkalian tidak melibatkan jumlah takberhingga; sebagai contoh, koefisien x^n dalam perkalian $f(x)g(x)$ adalah jumlah berhingga

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... + a_nb_0.$$

Latihan:

Jika $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$ dan $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...$, tentukan

$f(x) + g(x)$ dan $f(x)g(x)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \left(1 + x + x^2 + ... + x^n + ...\right) + \left(1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ...\right) \\ &= (1+1) + (1-1)x + (1+1)x^2 + ... + \left(1 + (-1)^n\right)x^n \\ &= 2 + 2x^2 + 2x^4 + ... \end{aligned}$$

$$f(x)g(x) = \left(1+x+x^2+...+x^n+...\right).\left(1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n+...\right)$$
$$= \left[1(-1)+1(1)\right]x + \left[1(1)+1(-1)+1(1)\right]x^2+...$$
$$= 1+x^2+x^4+x^6+...$$

□

Bagi mahasiswa yang pernah belajar kalkulus lebih dari satu tahun, dapat melihat kemiripan yang jelas di antara fungsi pembangkit dan deret kuasa dan akan merasa nyaman dengan kenyataan bahwa fungsi pembangkit sering dinyatakan sebagai **kuosien dari polinom**. Sebuah contoh yang penting adalah

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+...,$$

yang menunjukkan bahwa 1/(1-x) adalah fungsi pembangkit dari barisan 1,1,1,…

$$(1-x)\left(1+x+x^2+...+x^n+...\right)$$
$$= 1+\left[1(1)-1(1)\right]x+\left[1(1)-1(1)\right]x^2+...+\left[1(1)-1(1)\right]x^n+...$$
$$= 1+0x+0x^2+...+0x^n+...$$
$$= 1.$$

Rumus lain yang sangat bermanfaat adalah

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+...+(n+1)x^n+...$$

yang menunjukkan bahwa $\frac{1}{(1-x)^2}$ adalah fungsi pembangkit dari barisan bilangan asli.

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi pembangkit dari barisan 0, 1, 2, 3, …, yaitu

$$f(x) = 0+1x+2x^2+3x^3+4x^4+...+nx^n+...$$

Maka

$$f(x) = x+2x^2+3x^3+4x^4+...+nx^n+...$$
$$= x\left(1+2x+3x^2+4x^3+...+(n+1)x^n+...\right)$$
$$= x\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

Latihan:

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 3a_{n-1},\ n \geq 1$ diketahui $a_0 = 1$.

Jawab:

Perhatikan fungsi pembangkit $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ dari barisan $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ Kalikan dengan $3x$ dan tuliskan hasil kali $3xf(x)$ di bawah $f(x)$ sehingga suku-suku yang melibatkan x^n sesuai tempatnya:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \\ 3xf(x) &= \quad 3a_0x + 3a_1x^2 + 3a_2x^3 + \ldots + 3a_{n-1}x^n + \ldots \end{aligned}$$

Hasil pengurangannya adalah

$$f(x) - 3xf(x) = a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1)x^2 + \ldots + (a_n - 3a_{n-1})x^n + \ldots$$

Karena $a_0 = 1, a_1 = 3a_0$ dan secara umum, $a_n = 3a_{n-1}$, hal ini menunjukkan bahwa $(1-3x)f(x) = 1$. Jadi $f(x) = \dfrac{1}{1-3x}$ dan dengan menggunakan rumus sebelumnya diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-3x} &= 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (3x)^n + \ldots \\ &= 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots + 3^n x^n + \ldots \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa a_n yang merupakan koefisien x^n di $f(x)$, harus sama dengan 3^n. Jadi $a_n = 3^n$ adalah solusi dari relasi rekurensi di atas.

Latihan:

Selesaikan relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2$ diketahui $a_0 = 3, a_1 = -2$.

Jawab:

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi pembangkit dari barisan dalam pertanyaan di atas, maka

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \\ 2xf(x) &= \quad 2a_0x + 2a_1x^2 + \ldots + 2a_{n-1}x^n + \ldots \\ x^2f(x) &= \quad a_0x^2 + \ldots + a_{n-2}x^n + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) - 2xf(x) + x^2f(x) &= a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 + a_0)x^2 + \ldots + (a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2})x^n \\ &= 3 - 8x \end{aligned}$$

karena $a_0 = 3, a_1 = -2$ dan $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ untuk $n \geq 0$ sehingga $\left(1-2x+x^2\right) f\left(x\right) = 3-8x \Rightarrow \left(1-x\right)^2 f\left(x\right) = 3-8x$.

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{1}{\left(1-x\right)^2}\left(3-8x\right) \\
&= \left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+\left(n+1\right)x^n+\ldots\right)\left(3-8x\right) \\
&= 3-2x-7x^2-12x^3+\ldots+\left[3\left(n+1\right)-8n\right]x^n+\ldots \\
&= 3-2x-7x^2-12x^3+\ldots+\left(-5n+3\right)x^n+\ldots
\end{aligned}$$

dan $a_n = 3-5n$ adalah solusi relasi rekurensi yang diharapkan.

Latihan:

Dengan menggunakan fungsi pembangkit, carilah solusi relasi rekurensi berikut ini. Gunakan metode polinom karakteristik untuk memeriksa kebenaran jawabanmu.

1. $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$, $n \geq 2$, bila diketahui $a_0 = 1, a_1 = 4$.
2. $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $n \geq 2$, bila diketahui $a_0 = 2, a_1 = 5$.
3. $a_n = -10a_{n-1} - 25a_{n-2}$, $n \geq 2$, bila diketahui $a_0 = 1, a_1 = 25$.
4. $a_n = -a_{n-1} + 2n - 3$, $n \geq 1$, bila diketahui $a_0 = 1$.
5. $a_n = -5a_{n-1} + 3$, $n \geq 1$, bila diketahui $a_0 = 2$.

BAB 3
PRINSIP PENGHITUNGAN

Prinsip penghitungan merupakan bagian dari Kombinatorika, yang mempelajari struktur diskret yang terhitung atau berhingga, yang berkaitan dengan pengaturan obyek-obyek. Solusi yang diinginkan adalah jumlah atau banyaknya cara/pengaturan obyek-obyek tertentu dalam himpunannya. Dalam prinsip penghitungan ini akan dipelajari prinsip/kaidah penjumlahan dan perkalian, prinsip inklusi-eksklusi, dan prinsip sarang burung merpati.

3.1 Kaidah Penjumlahan dan Perkalian

Contoh:

1. Ada 5 karakter yang terdiri dari dua huruf yang diikuti dengan 3 angka, yang muncul di belakang satu series mikrokomputer buatan salah satu pabrik elektronik. Banyaknya kemungkinan pengaturan karakter dalam series tersebut adalah:
   a) 26x26x10x10x10=676.000, jika karakternya dapat diulang;
   b) 26x25x10x10x10=650.000, jika hurufnya tidak dapat diulang;
   c) 26x25x10x9x8=468.000, jika tidak ada karakter yang dapat diulang. □

2. Seorang dosen mempunyai 25 mahasiswa di kelas Kalkulus dan 31 mahasiswa di kelas Statistik. 13 mahasiswa dari dosen tersebut mengikuti 2 kuliah. Ada 3 kejadian yang muncul dari peristiwa ini:
   a) Kejadian pertama adalah bahwa seorang mahasiswa yang dipilih secara acak mengikuti kuliah Kalkulus, tapi bukan Statistik. Hal ini terjadi dalam 12 cara, yaitu 25-13=12.
   b) Kejadian ke dua adalah bahwa seorang mahasiswa yang dipilih secara acak mengikuti kuliah Statistik, tapi bukan Kalkulus. Hal ini terjadi dalam 18 cara, yaitu 31-13=18.
   c) Kejadian ke tiga adalah bahwa seorang mahasiswa yang dipilih secara acak mengikuti kuliah Statistik dan Kalkulus. Hal ini terjadi dalam 13 cara.

Jadi banyaknya mahasiswa yang mengikuti kedua kuliah tersebut adalah 12+18+13=43 orang. □

Dengan memperhatikan kedua contoh tersebut dapat dilihat bahwa contoh pertama diselesaikan dengan menggunakan perkalian dan contoh yang kedua dengan menggunakan penjumlahan. Aturan atau kaidah yang digunakan dalam menyelesaikan masalah seperti pada contoh tersebut dikenal dengan nama *Principal of Counting* (Kaidah Menghitung). Kaidah ini terdiri dari kaidah perkalian (*multiplication rule*) dan kaidah penjumlahan (*addition rule*).

a. Kaidah Perkalian

Misalkan ada barisan dari r kejadian $E_1, E_2, \ldots, E_r$ sedemikian sehingga:

i. Ada n_i cara di mana E_i muncul ($i = 1,2,\ldots,r$), dan
ii. Banyaknya cara suatu kejadian dalam barisan dapat terjadi tidak bergantung pada bagaimana kejadian dalam barisan sebelumnya terjadi. Dengan kata lain, dua kejadian itu bebas satu sama lain.

Maka ada $(n_1).(n_2)\ldots(n_r)$ cara di mana semua kejadian dalam barisan tersebut terjadi.

b. Kaidah Penjumlahan

Misalkan ada r kejadian $E_1, E_2, \ldots, E_r$ sedemikian sehingga:

i. Ada n_i hasil untuk E_i ($i = 1,2,\ldots,r$), dan
ii. Dua kejadian tidak dapat terjadi secara bersamaan. Maka ada $(n_1) + (n_2) + \ldots + (n_r)$ cara di mana salah satu kejadian dapat muncul (terjadi).

Latihan 2.1:

Tentukan banyaknya bilangan bulat ganjil dari 0 sampai 99.

Jawab:

Banyaknya bilangan ganjil dari 0 sampai 99 adalah 50. Dengan menggunakan kaidah perkalian, dapat diperoleh hasil sebagai berikut:

i. Bilangan bulat di antara 0 dan 99 mempunyai digit satuan dan digit puluhan, jika angka 0 sampai 9 ditulis sebagai 00, 01, …, 09.

ii. Misalkan E adalah kejadian memilih digit dari digit satuan. Hal ini dapat dilakukan dengan 5 cara (karena bilangan ganjil, maka digit yang dipilih adalah 1,3,5,7,9).

iii. Misalkan F adalah kejadian memilih digit dari digit puluhan, maka hal ini dapat dilakukan dengan 10 cara (yaitu angka 0,1,…,9).

Perhatikan bahwa banyaknya cara dalam E dapat terjadi tanpa tergantung pada bagaimana F dapat terjadi, demikian pula sebaliknya. Maka barisan F, E dapat muncul dalam 50 cara. □

Latihan 2.2:
Misalkan soalnya sama seperti pada Latihan 2.1, namun dengan digit yang berbeda.

Jawab:

Kasus I:

i. E dapat dipilih dengan 5 cara.

ii. F dapat dipilih dengan 9 cara. Perhatikan bahwa banyaknya cara F terjadi tidak bergantung pada bagaimana E terjadi.

Maka dengan aturan perkalian, barisan E, F dapat terjadi dalam 45 cara. Jadi ada 45 bilangan bulat ganjil yang berbeda.

Kasus II:

i. Jika F adalah kejadian pertama, maka F dapat dipilih dengan 10 cara.

ii. E sebagai kejadian ke dua dapat dipilih dengan 5 cara, jika F nya genap dan 4 cara jika F nya ganjil. Dengan kata lain banyaknya cara di mana E terjadi bergantung kepada kejadian F muncul, sehingga aturan perkalian tidak dapat diberlakukan untuk barisan F, E. □

Latihan 2.3:

Tentukan banyaknya bilangan genap dari 100-999 yang tidak mempunyai pengulangan digit.

Jawab:

Kasus I: bilangannya berakhir dengan angka 0

Karena bilangannya terdiri dari tiga digit dan digit ke-tiga sudah diambil oleh angka 0, maka tinggal dua digit yang harus ditentukan banyaknya pilihan. Untuk digit pertama, ada 9 pilihan (yaitu 1-9) dan untuk digit ke-dua, ada 8 pilihan (angka 0 dan digit pertama tidak termasuk), sehingga secara keseluruhan ada $9 \times 8 = 72$ bilangan genap yang berakhir dengan angka 0.

Kasus II: bilangannya tidak berakhir dengan angka 0

Digit terakhir ada 4 pilihan (yaitu 2,4,6,8), digit pertama ada 8 pilihan (angka 0 dan digit terakhir tidak termasuk) dan digit ke-dua ada 8 pilihan (digit pertama dan terakhir tidak termasuk), sehingga secara keseluruhan ada $4 \times 8 \times 8 = 256$ bilangan genap yang tidak berakhir dengan angka 0.

Berdasarkan kaidah penjumlahan, ada $72 + 256 = 328$ bilangan genap dari 100-999 dengan tidak ada pengulangan digit.

□

Latihan 2.4:

Soalnya sama dengan Latihan 2.3. Perhatikan kasus II di atas. Untuk soal ini, pemilihan bilangan dimulai dari digit terakhir, digit pertengahan dan digit pertama, dengan memisahkan kasus menjadi digit pertengahan adalah 0 dan digit pertengahan adalah bukan 0.

Jawab:

***Kasus* I:** jawabannya sama dengan soal Latihan 2.3 kasus pertama, ada 72 bilangan genap yang berakhir dengan angka 0.

***Kasus* II**: bilangannya tidak berakhir dengan angka 0

a. Jika digit pertengahan adalah 0, maka digit terakhir ada 4 pilihan (2,4,6,8) dan digit pertama ada 8 pilihan (digit terakhir dan 0 tidak termasuk), sehingga ada $4 \times 8 = 32$ bilangan genap dengan tipe ini.

b. Jika digit pertengahan bukan angka 0, maka digit terakhir ada 4 pilihan (2,4,6,8), digit pertengahan ada 8 pilihan (0 dan digit terakhir tidak termasuk) dan digit pertama ada 7 pilihan, sehingga ada $487 = 224$ bilangan dengan tipe ini.

Untuk kasus II ada 32 + 224 = 256 bilangan genap dengan tipe ini.

Jadi secara keseluruhan, ada 72 + 256 = 328 bilangan genap dari 100-999 yang tidak mempunyai pengulangan digit. $\square$

Latihan 2.5:

Soalnya sama dengan Latihan 2.3, tetapi penyelesaiannya dibagi dalam 4 kasus, yaitu:

i) Dua digit pertama genap,

ii) Dua digit pertama ganjil,

iii) Digit pertama genap, digit ke-dua ganjil,

iv) Digit pertama ganjil, digit ke-dua genap.

Jawab:

Pemilihan digit pertama dan ke-dua dibagi dalam empat kasus:

Kasus 1: Jika dua digit pertama genap, maka untuk digit pertama ada 4 pilihan (2,4,6,8), digit ke-dua ada 4 pilihan (digit pertama tidak termasuk) dan digit terakhir ada 3 pilihan (angka 0, digit pertama dan digit ke-dua tidak termasuk), sehingga ada $4 \times 4 \times 3 = 48$ bilangan dengan tipe ini.

Kasus 2: Jika dua digit pertama adalah ganjil, maka untuk digit pertama ada 5 pilihan (1,3,5,7,9), digit ke-dua ada 4 pilihan (digit pertama tidak termasuk) dan digit terakhir ada 5 pilihan (0,2,4,6,8), sehingga ada $5 \times 4 \times 5 = 100$ bilangan dengan tipe ini.

Kasus 3: Jika digit pertama genap dan digit ke-dua ganjil, maka untuk digit pertama ada 4 pilihan (2,4,6,8), digit ke-dua ada 5 pilihan (1,3,5,7,9) dan digit terakhir ada 4 pilihan (digit pertama tidak termasuk), sehingga ada $4 \times 5 \times 4 = 80$ bilangan dengan tipe ini.

Kasus 4: Jika digit pertama ganjil dan digit ke-dua genap, maka untuk digit pertama ada 5 pilihan (1,3,5,7,9), digit ke-dua ada 5 pilihan (0,2,4,6,8) dan digit terakhir ada 4 pilihan (digit ke-dua tidak termasuk), sehingga ada $5\times5\times4=100$ bilangan dengan tipe ini.

Jadi secara keseluruhan, banyaknya bilangan genap yang tidak mempunyai digit yang berulang ada $48+100+80+100=328$. □

3.2 Prinsip Inklusi-Ekslusi

Proposisi:

Misalkan himpunan *A* dan *B* adalah subset dari himpunan berhingga *U*. Maka

(a) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

(b) $|A\cap B|\le \min\{|A|,|B|\}$, minimum dari $|A|$ dan $|B|$

(c) $|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|\ge|A|-|B|$

(d) $|A^c|=|U|-|A|$, dengan U adalah himpunan semesta

(e) $|A\oplus B|=|A\cup B|-|A\cap B|=|A|+|B|-2|A\cap B|=|A\setminus B|+|B\setminus A|$

(f) $|A\times B|=|A|\times|B|$

Prinsip Inklusi-Eksklusi:

Diketahui sejumlah berhingga himpunan berhingga $A_1, A_2, ..., A_n$. Banyaknya elemen dalam gabungan himpunan berhingga tersebut adalah

$$|A_1\cup A_2\cup...\cup A_n|=\sum_i|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$-...+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap...\cap A_n|$$

Latihan 2.6:

Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 300 yang:

a) Habis dibagi paling sedikit salah satu dari 3, 5, atau 7.

b) Habis dibagi 3 dan 5, tetapi tidak habis dibagi 7.

c) Habis dibagi 5, tetapi tidak habis dibagi 3 maupun 7.

Jawab:

Misalkan himpunan *A*, *B* dan *C* adalah himpunan-himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 300 yang habis dibagi 3, 5 dan 7:

$A = \{n \mid 1 \le n \le 300, 3 \mid n\}$, $B = \{n \mid 1 \le n \le 300, 5 \mid n\}$, dan $C = \{n \mid 1 \le n \le 300, 7 \mid n\}$.

a). Banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 300 yang habis dibagi paling sedikit salah satu dari 3,5 atau 7, berarti mencari:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

$$|A| = \lfloor 300/3 \rfloor = 100,\ |B| = \lfloor 300/5 \rfloor = 60,\ |C| = \lfloor 300/7 \rfloor = 42.$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{300}{3 \times 5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20,\ |A \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{3 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{21} \right\rfloor = 14,$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{5 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{35} \right\rfloor = 8,\ |A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{300}{105} \right\rfloor = 2.$$

Jadi $|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162.$

Dengan demikian, banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi paling sedikit salah satu dari 3, 5, 7 adalah 162 bilangan. □

Catatan:

Fungsi Bawah (*The Floor Function*)

Untuk suatu bilangan real x, batas bawah dari x, ditulis $\lfloor x \rfloor$, adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, yaitu bilangan bulat tunggal $\lfloor x \rfloor$ yang memenuhi $x-1<\lfloor x \rfloor \le x$.

Contoh: $\lfloor 3,05 \rfloor = 3,$ $\lfloor 2,95 \rfloor = 2,$ $\lfloor 4 \rfloor = 4,$ $\lfloor -5,17 \rfloor = -6,$ $\lfloor -1,87 \rfloor = -2$.

b). Banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 tetapi tidak habis dibagi 7 adalah banyaknya bilangan bulat dalam himpunan $(A \cap B)\setminus C$, sehingga penyelesaiannya sebagai berikut:

$$|(A \cap B)\setminus C| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C| = 20 - 2 = 18.$$

c). Banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 5, tetapi tidak habis dibagi 3 atau 7 adalah bilangan bulat dalam himpunan $B\setminus(A \cup C)$ sehingga penyelesaiannya sebagai berikut:

$$|B\setminus(A \cup C)| = |B| - |B \cap (A \cup C)| = |B| - \{|B \cap A| \cup |B \cap C|\}$$

Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$\begin{aligned} |B \cap A| \cup |B \cap C| &= |B \cap A| + |B \cap C| - \{|B \cap A| \cap |B \cap C|\} \\ &= |B \cap A| + |B \cap C| - |B \cap A \cap C| \\ &= 20 + 8 - 2 = 26, \end{aligned}$$

Sehingga

$$|B\setminus(A \cup C)| = |B| - |B \cap (A \cup C)| = 60 - 26 = 34.$$

Jadi banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 5 tetapi tidak habis dibagi 3 dan 7 adalah sebanyak 34 bilangan. □

Latihan 2.7:

Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 500 yang

a). habis dibagi 3 atau 5.

b). habis dibagi 3 tetapi tidak oleh 5 atau 6.

Jawab:

Misalkan *A*, *B* dan *C* adalah himpunan-himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3, 5 dan 6:

$$A=\{n|1\le n\le 500, 3|n\},\ \ B=\{n|1\le n\le 500, 5|n\},\ \ C=\{n|1\le n\le 500, 6|n\}.$$

a). Banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 3 atau 5 adalah

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=166+100-33=233..$$

Keterangan:

$$|A|=\left\lfloor\frac{500}{3}\right\rfloor=166,\ |B|=\left\lfloor\frac{500}{5}\right\rfloor=100,\ |A\cap B|=\left\lfloor\frac{500}{3\times 5}\right\rfloor=33.$$

b). Banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi oleh 5 atau 6 adalah banyaknya bilangan dalam himpunan $A\setminus(B\cup C)$:

$$|A\setminus(B\cup C)|=|A|-|A\cap(B\cup C)|=|A|-|(A\cap B)\cup(A\cap C)|\ \ldots\ldots. (1)$$

Berdasarkan prinsip inklusi-eksklusi,

$$\begin{aligned}|(A\cap B)\cup(A\cap C)|&=|(A\cap B)|+|(A\cap C)|-|(A\cap B)\cap(A\cap C)|\\&=|(A\cap B)|+|(A\cap C)|-|(A\cap B\cap C)|\end{aligned}\ \ldots\ldots (2)$$

Dengan perhitungan diperoleh hasil:

$$|A\cap B|=\left\lfloor\frac{500}{3\times 5}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{500}{15}\right\rfloor=33,\qquad |A\cap C|=\left\lfloor\frac{500}{\operatorname{lcm}(3,6)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{500}{6}\right\rfloor=83,$$

$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{500}{\operatorname{lcm}(3,5,6)}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{500}{30}\right\rfloor=16,$ sehingga persamaan (2) menjadi:

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=33+83-16=100$, dan persamaan (1) menjadi

$$|A\setminus(B\cup C)|=166-100=66.$$

Jadi banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 3, tetapi tidak habis dibagi 5 atau 6 ada 66 bilangan. □

Catatan: *lcm* = *least common multiple* (kelipatan persekutuan terkecil)

Latihan 2.8:

Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 250 yang habis dibagi oleh salah satu dari tiga bilangan bulat berikut: 4, 6 dan 15?

Jawab:

Misalkan *P*, *Q* dan *R* adalah himpuan-himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 250 yang habis dibagi 4, 6 dan 15.

$P = \{n | 1 \le n \le 250, 4|n\}$, $Q = \{n | 1 \le n \le 250, 6|n\}$,

$R = \{n | 1 \le n \le 250, 15|n\}$.

Maka banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi salah satu tiga bilangan bulat 4, 6 atau 15 adalah:

$$|P \cup Q \cup R| = |P| + |Q| + |R| - |P \cap Q| - |P \cap R| - |Q \cap R| + |P \cap Q \cap R| \quad \ldots. (3)$$

Dengan perhitungan diperoleh:

$$|P| = \left\lfloor \frac{250}{4} \right\rfloor = 62,\ |Q| = \left\lfloor \frac{250}{6} \right\rfloor = 41,\ |R| = \left\lfloor \frac{250}{15} \right\rfloor = 16,$$

$$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{250}{\operatorname{lcm}(4,6)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{250}{12} \right\rfloor = 20, \qquad |P \cap R| = \left\lfloor \frac{250}{\operatorname{lcm}(4,15)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{250}{60} \right\rfloor = 4,$$

$$|Q \cap R| = \left\lfloor \frac{250}{\operatorname{lcm}(6,15)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{250}{30} \right\rfloor = 8,$$

$|P \cap Q \cap R| = \left\lfloor \dfrac{250}{\operatorname{lcm}(4,6,15)} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{250}{60} \right\rfloor = 4$, sehingga hasil perhitungan dari persamaan (3) adalah

$$|P \cup Q \cup R| = 62 + 41 + 16 - 20 - 4 - 8 + 4 = 91.$$

Jadi banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 250 yang habis dibagi oleh salah satu dari tiga bilangan 4, 6, atau 15 ada 91 bilangan. □

Latihan 2.9:

a). Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

b). Tentukan banyaknya bilangan bulat di antara 1 dan 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

Jawab:

a). Misalkan *K*, *L*, *M* dan *N* adalah himpunan-himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 2, 3, 5 dan 7.

$K=\{n|1\le n\le 1000, 2|n\}$, $L=\{n|1\le n\le 1000, 3|n\}$,

$M=\{n|1\le n\le 1000, 5|n\}$, $N=\{n|1\le n\le 1000, 7|n\}$.

Maka banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah

$$|K\cup L\cup M\cup N|^C=1000-|K\cup L\cup M\cup N|$$

$$\begin{aligned}|K\cup L\cup M\cup N| &= |K|+|L|+|M|+|N|-|K\cap L|-|K\cap M|-|K\cap N|-|L\cap M|\\ &\quad -|L\cap N|-|M\cap N|+|K\cap L\cap M|+|K\cap L\cap N|+|L\cap M\cap N|\\ &\quad -|K\cap L\cap M\cap N|\\ &=(500+333+200+142)-(166+100+71+66+47+28)\\ &\quad +(33+23+9)-4\\ &=1175-478+65-4=758.\end{aligned}$$

Jadi banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah

$$|K\cup L\cup M\cup N|^C=1000-|K\cup L\cup M\cup N|=1000-758=242 \text{ bilangan.}$$

□

Keterangan:

$$|K| = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor = 500,\ |L| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333,\ |M| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200,$$

$$|N| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142,\ |K \cap L| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 3} \right\rfloor = 166,\ |K \cap M| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 5} \right\rfloor = 100,$$

$$|K \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 7} \right\rfloor = 71,\ |L \cap M| = \left\lfloor \frac{1000}{3\times 5} \right\rfloor = 66,\ |L \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{3\times 7} \right\rfloor = 47,$$

$$|M \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{5\times 7} \right\rfloor = 28,\ |K \cap L \cap M| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 33,$$

$$|K \cap L \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 23,\ |L \cap M \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 9,$$

$$|K \cap L \cap M \cap N| = \left\lfloor \frac{1000}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 4.$$

b). Dengan cara yang sama seperti pada penyelesaian soal a), diperoleh hasil jawaban sebagai berikut:

Misalkan *R, S, T* dan *U* adalah himpunan-himpunan bilangan bulat di antara 1 dan 1000 yang habis dibagi 2, 3, 5 dan 7.

$$R = \{n \mid 1 < n < 1000, 2|n\},\ S = \{n \mid 1 < n < 1000, 3|n\},\ T = \{n \mid 1 < n < 1000, 5|n\},$$

$$U = \{n \mid 1 < n < 1000, 7|n\}.$$

Maka banyaknya bilangan bulat di antara 1 dan 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah

$$|R \cup S \cup T \cup U|^C = 998 - |R \cup S \cup T \cup U|$$

$$\begin{aligned}
|R \cup S \cup T \cup U| &= |R| + |S| + |T| + |U| - |R \cap S| - |R \cap T| - |R \cap U| - |S \cap T| \\
&\quad - |S \cap U| - |T \cap U| + |R \cap S \cap T| + |R \cap S \cap U| + |S \cap T \cap U| \\
&\quad - |R \cap S \cap T \cap U| \\
&= (499 + 332 + 199 + 142) - (166 + 99 + 71 + 66 + 47 + 28) \\
&\quad + (33 + 23 + 9) - 4 \\
&= 1172 - 477 + 65 - 4 = 756.
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya bilangan bulat di antara 1 dan 1000 yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah

$$\left|R \cup S \cup T \cup U\right|^{C} = 998 - \left|R \cup S \cup T \cup U\right| = 998 - 756 = 242 \text{ bilangan.}$$

□

Keterangan:

$$|R| = \left\lfloor \frac{998}{2} \right\rfloor = 499,\ |S| = \left\lfloor \frac{998}{3} \right\rfloor = 332,\ |T| = \left\lfloor \frac{998}{5} \right\rfloor = 199,\ |U| = \left\lfloor \frac{998}{7} \right\rfloor = 142,$$

$$|R \cap S| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 3} \right\rfloor = 166,\ |R \cap T| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 5} \right\rfloor = 99,\ |R \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 7} \right\rfloor = 71,$$

$$|S \cap T| = \left\lfloor \frac{998}{3\times 5} \right\rfloor = 66,\ |S \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{3\times 7} \right\rfloor = 47,\ |T \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{5\times 7} \right\rfloor = 28,$$

$$|R \cap L \cap T| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 33,\ |R \cap S \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 23,$$

$$|S \cap T \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 9,\ |R \cap S \cap T \cap U| = \left\lfloor \frac{998}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 4.$$ □

Latihan 2.10:

Tentukan banyaknya bilangan prima yang tidak lebih dari 100. Jelaskan jawabanmu.

Jawab:

Banyaknya bilangan bulat positif *n* yang tidak lebih dari 100 adalah 100 bilangan. Berdasarkan "*The Sieve of Eratosthenes*" (saringan Eratosthenes), bilangan prima yang tidak lebih dari 100 dapat dicari dengan acuan bahwa bilangan prima *p* tidak boleh lebih dari akar 100 ($p \le \sqrt{100}$). Karena $p \le 10$ maka bilangan prima *p* adalah 2, 3, 5, dan 7. Tuliskan bilangan bulat positif secara terurut dari 2 sampai 100, lalu eliminasi bilangan-bilangan yang merupakan kelipatan 2*p*, 3*p*, 4*p*, 5*p*, ... Perhatikan bahwa bilangan-bilangan yang tidak tereliminasi adalah bilangan-bilangan bulat yang tidak habis dibagi 2, 3, 5, atau 7. Untuk menghitung banyaknya bilangan prima adalah dengan jalan menghitung banyaknya bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7, dikurangi 1 (bilangan 1 bukan prima), ditambah dengan 4 bilangan prima pertama, yaitu 2, 3, 5 dan 7.

Misalkan himpunan *A*, *B*, *C* dan *D* adalah himpunan-himpunan yang elemennya habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

$A = \{n \mid 1 \le n \le 100, 2 \mid n\}$, $B = \{n \mid 1 \le n \le 100, 3 \mid n\}$, $C = \{n \mid 1 \le n \le 100, 5 \mid n\}$,

$D = \{n \mid 1 \le n \le 100, 7 \mid n\}$.

Maka dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya bilangan bulat yang habis dibagi 2, 3, 5 atau 7.

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| \\
&\quad - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
&\quad - |A \cap B \cap C \cap D|
\end{aligned}$$

dengan:

$$|A| = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50,\ |B| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33,\ |C| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20,\ |D| = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 14,$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3} \right\rfloor = 16,\ |A \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5} \right\rfloor = 10,\ |A \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 7} \right\rfloor = 7,$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5} \right\rfloor = 6,\ |B \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{3 \times 7} \right\rfloor = 4,\ |C \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{5 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 3,\ |A \cap B \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 2,$$

$$|A \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1,\ |B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 0,$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{100}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 0.$$

Maka bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= (50 + 33 + 20 + 14) - (16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2) + (3 + 2 + 1 + 0) - 0 \\
&= 117 - 45 + 6 - 0 \\
&= 78
\end{aligned}$$

Banyaknya bilangan bulat yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 adalah 100 – 78 = 22 (termasuk bilangan 1). Jadi banyaknya bilangan prima yang kurang dari 100 adalah banyaknya bilangan bulat yang tidak habis dibagi 2, 3, 5 atau 7 dikurang 1 (bilangan 1) ditambah 4 bilangan prima pertama (2, 3, 5 dan 7), yaitu 22 -1 + 4 = 25 bilangan prima. □

Latihan 2.11:

Hitunglah banyaknya bilangan prima yang kurang dari 200. Jelaskan jawabanmu dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi.

Latihan 2.12:

Tentukan banyaknya bilangan dari 2 sampai 100 yang merupakan kuadrat sempurna, pangkat tiga sempurna atau pangkat lebih tinggi.

Jawab:

Perhatikan himpunan obyek-obyek {2,3,…,100}. Misalkan elemen dari himpunan ini mempunyai sifat *i* jika elemen tersebut sama dengan pangkat ke *i* dari suatu bilangan bulat. Karena 2^7>100, maka tidak ada pangkat 7 dalam himpunan dan sifat-sifat yang ada hanya sifat 2,3,4,5,dan 6. Maka banyaknya elemen yang mempunyai sifat 2,3,4,5 dan 6 adalah

$$\begin{aligned}&|A2 \cup A3 \cup A4 \cup A5 \cup A6| = |A2| + |A3| + |A4| + |A5| + |A6| \\ &-|A2,3| - |A2,4| - |A2,5| - |A2,6| - |A3,4| - |A3,5| - |A3,6| - |A4,5| - |A4,6| - |A5,6| \\ &+|A2,3,4| + |A2,3,5| + |A2,3,6| + |A2,4,5| + |A2,4,6| + |A2,5,6| + |A3,4,5| + |A3,4,6| \\ &+|A4,5,6| - |A2,3,4,5| - |A2,3,4,6| - |A3,4,5,6| + |A2,3,4,5,6| = 12.\end{aligned}$$

Keterangan:

Misalkan:

$|A2|$ = banyaknya obyek yang mempunyai sifat 2 = $\left[\sqrt[2]{100}\right] - 1 = 10 - 1 = 9.$

Obyek-obyeknya adalah

$$2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81, 10^2 = 100.$$

$|A3|$:= banyaknya obyek yang mempunyai sifat 3 = $\left[\sqrt[3]{100}\right] - 1 = 4 - 1 = 3$.

Obyek-obyeknya adalah $2^3 = 8, 3^3 = 27, 4^3 = 64.$

$|A4|$ = banyaknya obyek yang mempunyai sifat 4 = $\left[\sqrt[4]{100}\right] - 1 = 3 - 1 = 2.$

Obyek-obyeknya adalah $2^4 = 16, 3^4 = 81.$

$|A5| =$ banyaknya obyek yang mempunyai sifat 5 = $\left[\sqrt[5]{100}\right] - 1 = 2 - 1 = 1.$

Obyek adalah $2^5 = 32.$

$|A6| =$ banyaknya obyek yang mempunyai sifat 6 = $\left[\sqrt[6]{100}\right] - 1 = 2 - 1 = 1.$

Obyeknya adalah $2^6 = 64.$

$|A2,3| =$ banyaknya obyek yang mempunyai sifat 2 dan 3 = $|A6| =$ 1.

$|A2,4| =$ banyaknya obyek yang mempunyai sifat 2 dan 4 = $|A4| =$ 2.

$|A2,5| = |A10| = 0,\ |A2,6| = |A6| = 1,\ |A3,4| = |A12| = 0,\ |A3,5| = |A15| = 0,$

$|A3,6| = |A6| = 1,\ |A4,5| = |A20| = 0,\ |A4,6| = |A12| = 0,\ |A5,6| = |A30| = 0.$

$|A2,3,4| = |A12| = 0,\ |A2,3,5| = |A30| = 0,\ |A2,3,6| = |A6| = 1,\ |A3,4,5| = |A60| = 0,$

$|A3,4,6| = |A12| = 0,\ |A4,5,6| = |A60| = 0,\ |A2,3,4,5| = |A60| = 0,\ |A2,3,4,6| = |A12| = 0,$
$|A2,3,5,6| = |A30| = 0,\ |A3,4,5,6| = |A60| = 0,\ |A2,3,4,5,6| = |A60| = 0.$

Kesimpulan:

Jadi banyaknya bilangan dari 2 sampai 100 yang merupakan kuadrat sempurna, pangkat tiga sempurna, atau pangkat yang lebih tinggi ada 12 bilangan. □

Catatan: $[x]$ menyatakan bagian bilangan bulat dari *x*.

Latihan 2.13:

Andaikan himpunan *A* dan *B* adalah himpunan berhingga. Buktikan bahwa

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Jawab:

Misalkan $A = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n \mid x_i \in \square\}$ dan $B = \{y_1, y_2, y_3, ..., y_m \mid y_j \in \square\}$.

$A \times B =$

$$\left\{ \underbrace{\underbrace{(x_1,y_1),(x_2,y_1),\ldots,(x_n,y_1)}_{n},\underbrace{(x_1,y_2),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_2)}_{n},\ldots,\underbrace{(x_1,y_m),(x_2,y_m),\ldots,(x_n,y_m)}_{n}}_{m} \right\}$$

$$|A \times B| = \underbrace{n+n+n+\ldots+n}_{m} = n \times m = |A| \times |B|. \qquad \square$$

3.3 Prinsip Sarang Burung Merpati (*Pigeon-hole Principle*)

Misalkan ada n banyaknya sarang/kandang burung merpati yang berupa lubang-lubang. Setiap sarang biasanya ditempati oleh satu burung merpati. Bila ada n+1 atau lebih burung merpati ditempatkan ke dalam sarang tersebut, maka akan ada sarang yang isinya dua merpati atau lebih. Pernyataan ini dikenal dengan nama **Prinsip Sarang Burung Merpati** (*Pigeonhole Principle*). Prinsip ini pertama kali dikemukakan oleh G. Lejeune Dirichlet, seorang matematikawan Jerman, sehingga *Pigeonhole Principle* ini sering juga disebut sebagai ***Dirichlet Pigeonhole Principle***. Prinsip ini hanya memberitahukan tentang obyek-obyek yang ada, bukan memberitahu bagaimana mencari obyek-obyek tersebut.

Teorema 3.1:

Jika n + 1 atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka paling sedikit ada lebih dari 1 burung merpati di dalam sarang burung tersebut.

Teorema 3.1*: (versi lain I)

Jika n + 1 atau lebih obyek ditempatkan di dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi dua atau lebih obyek.

Teorema 3.1**: (versi lain II)

Jika n obyek ditempatkan di dalam m buah kotak dan n > m, maka paling sedikit satu kotak berisi dua atau lebih obyek.

Contoh:

1. Dari 13 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada bulan yang sama.

   Jawab:
   misalkan 13 mahasiswa sebagai merpati dan 12 bulan sebagai sarangnya, maka paling sedikit dalam satu sarang ada dua merpati atau lebih. Dengan kata lain, paling sedikit ada dua mahasiswa yang mempunyai bulan kelahiran yang sama.

2. Dari 32 mahasiswa dalam 1 kelas, paling sedikit ada mahasiswa yang berulang tahun pada tanggal yang sama.

   Jawab:
   misalkan 32 mahasiswa sebagai merpati dan 31 hari sebagai sarangnya, maka paling sedikit dalam satu sarang ada dua merpati atau lebih. Dengan kata lain, paling sedikit ada dua mahasiswa yang mempunyai tanggal kelahiran yang sama.

3. Dalam sebuah turnamen sepakbola (turnamen *round-robin*), setiap tim bermain melawan tim lainnya tepat satu kali. Misalkan setiap tim menang minimal sekali. Maka ada paling sedikit 2 tim yang menang sekali. Jika ada n tim, maka banyaknya kemenangan untuk setiap tim adalah 1 atau 2 atau 3 atau … (n-1). Bilangan n-1 kemenangan ini berhubungan dengan n-1 sarang burung, sementara n tim berhubungan dengan burung merpati. Jadi paling sedikit ada dua tim yang ada di sarang burung yang sama. Dengan kata lain, tim-tim tersebut mempunyai jumlah kemenangan yang sama.

4. Diketahui sepuluh bilangan bulat positif yang kurang dari 107. Dari sepuluh bilangan tersebut dibuat subset-subset, baik yang saling lepas maupun tidak. Tunjukkan bahwa ada dua subset yang saling lepas dari subset-subset tersebut yang jumlah elemen di dalam subsetnya sama.

Jawab:

Dari 10 bilangan tersebut dapat dibentuk subset sebanyak $2^{10} = 1024$. Jumlah terendah dari subset tersebut adalah 0, yang dipunyai oleh $\{\}=\varnothing$.

10 bilangan tertinggi yang kurang dari 107 tersebut adalah 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, yang jumlah tertingginya adalah 1015. Dengan memisalkan sarang burung dengan jumlah elemen subset, maka akan ada sarang burung bernomor 0 sampai 1015. Misalkan setiap jumlah elemen dalam subset dituliskan di atas secarik kertas dan kertas-kertas tersebut ditempatkan ke sarang burung, maka akan ada 1024 carik kertas yang ditempatkan dalam 1015 sarang burung. Berdasarkan Teorema Sarang Merpati, akan ada dua atau lebih carik kertas yang menempati sarang burung yang sama. Artinya, ada 2 subset atau lebih yang mempunyai jumlah elemen yang sama.

5. Buktikan bahwa dari 5 titik yang dipilih dari sebuah persegi yang panjang sisi-sisinya 2, ada 2 titik yang jaraknya satu sama lain paling banyak $\sqrt{2}$.

Bukti:

Bagilah persegi tersebut ke dalam persegi kecil dengan panjang sisi-sisi 1. Berdasarkan prinsip sarang merpati, paling sedikit dua dari 5 titik yang dipilih pasti terletak pada sudut-sudut persegi kecil atau pada batas persegi kecil tersebut. Jarak dua titik pada persegi kecil tersebut paling banyak adalah $\sqrt{2}$.

Teorema 3.2: Prinsip Sarang burung secara Umum

Jika $kn + 1$ atau lebih burung merpati menempati n sarang burung, maka akan ada lebih dari k burung merpati dalam paling sedikit satu sarang burung, dengan k bilangan bulat positif.

Teorema 3.3*: Prinsip Sarang burung yang dirampatkan

Jika M obyek ditempatkan ke dalam n buah kotak, maka paling sedikit terdapat satu kotak yang berisi minimal $\lceil M / n \rceil$ obyek.

Teorema 3.3: Prinsip Sarang burung (bentuk kuat)**

Jika n obyek ditempatkan ke dalam m buah kotak, dan $n > m$, maka ada kotak yang berisi minimal $\lceil n/m \rceil$ obyek.

Catatan:

Fungsi atas (*The Ceiling Function*)

Untuk suatu bilangan real x, batas atas dari x, ditulis $\lceil x \rceil$, adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x, yaitu bilangan bulat tunggal $\lceil x \rceil$ yang memenuhi $x \le \lceil x \rceil \le x+1$.

Contoh: $\lceil 2{,}58 \rceil = 3$, $\lceil 3{,}15 \rceil = 4$, $\lceil 7 \rceil = 7$, $\lceil -6{,}23 \rceil = -6$, $\lceil -1{,}95 \rceil = -1$.

Contoh:

Di antara 40 mahasiswa yang ada di kelas, terdapat paling sedikit $\lceil 40/12 \rceil = 4$ mahasiswa yang lahir pada bulan yang sama, $\lceil 40/31 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada tanggal yang sama, $\lceil 40/7 \rceil = 6$ mahasiswa yang lahir pada hari yang sama, $\lceil 40/24 \rceil = 2$ mahasiswa yang lahir pada jam yang sama.

Contoh:

Sekantung kelereng terdiri dari 5 merah, 8 biru, 10 putih, 12 hijau, dan 7 kuning. Tentukan minimal kelereng yang dipilih yang menjamin paling sedikit ada:

a. 4 kelereng dengan warna sama
b. 6 kelereng dengan warna sama
c. 7 kelereng dengan warna sama
d. 9 kelereng dengan warna sama.

Petunjuk: setiap warna menyatakan sarang burung. Banyaknya sarang burung ada 5.

Jawab:

a. Jika paling sedikit ada 4 kelereng dengan warna sama, maka ada sarang burung yang isinya lebih dari 3 burung. Dengan menggunakan Teorema 3.2 dengan $k = 3$, maka banyaknya kelereng yang diambil paling sedikit ada (3)(5) + 1 =16.

b. Karena $n = 5$ dan $k = 5$, maka banyaknya kelereng yang diambil adalah (5)(5) + 1 =26.

c. $n = 5$ dan $k = 6$. Karena batas atas untuk kelereng merah adalah 5, maka untuk banyaknya kelereng yang diambil adalah [(6)(5) + 1] – (6-5) = 30.

d. Dengan cara yang sama dengan no. c, maka untuk n = 5 dan k = 8, dan batas atas untuk kelereng merah adalah 5 dan kuning adalah 7, maka banyaknya kelereng yang diambil adalah [(8.5+1)] - (8-5) - (8-7) = 37.

Teorema:

a) Jika m merpati ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka paling sedikit satu sarang ditempati oleh lebih dari k merpati, dengan k adalah batas bawah dari $(m-1)/n$.

b) Jika $m = p_1 + p_2 + ... + p_n - n + 1$ merpati (masing-masing p_i merupakan bilangan bulat positif) ditempatkan ke dalam n sarang burung, maka sarang pertama mempunyai paling sedikit p_1 merpati, atau sarang ke-dua mempunyai paling sedikit p_2 merpati, …, atau sarang ke-n mempunyai paling sedikit p_n merpati.

Contoh:

Sekantung kelereng berisi tepat 6 kelereng merah, 5 kelereng putih, dan 7 kelereng biru. Tentukan jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil yang akan menjamin paling sedikit 3 kelereng merah atau paling sedikit 4 kelereng putih atau paling sedikit 5 kelereng biru yang terambil.

Jawab:

Misalkan p_1 adalah kelereng merah, p_2 adalah kelereng putih dan p_3 adalah kelereng biru. Dengan menggunakan Teorema di atas diperoleh $n=3,\ p_1=3,\ p_2=4,\ p_3=5,$ sehingga jumlah terkecil kelereng yang bisa diambil adalah $m=(3+4+5)-3+1=10.$

Contoh:

1. Dari 100 orang mahasiswa, beberapa di antaranya berulang tahun pada bulan yang sama. Paling sedikit ada berapa mahasiswa yang berulang tahun pada bulang yang sama?

   Jawab:

   $\lceil 100/12 \rceil = 9.$

2. Dari suatu kelompok mahasiswa yang terdiri dari 6 orang, paling sedikit tiga di antaranya adalah teman atau paling sedikit 3 di antaranya bukan teman.

   Jawab:

   Misalkan anda adalah satu di antara 6 mahasiswa tersebut dan mahasiswa menyatakan merpati. Buatlah 2 kotak yang berlabel "temanku" dan "bukan temanku". Masukkan ke lima merpati yang dinyatakan dalam secarik kertas yang bernomor 1 sampai 5 ke dalam dua kotak berlabel. Berdasarkan prinsip sarang merpati bentuk kuat, paling sedikit ada $\lceil 5/2 \rceil = 3$ merpati dalam satu kotak. Misalkan 3 teman ini adalah teman anda. Jika dua dari 3 teman ini adalah teman anda, maka bersama-sama dengan anda, akan ada paling sedikit 3 teman akrab. Jika dua dari 3 teman ini bukan teman anda, maka 3 teman tersebut bukan teman satu sama lain.

3. Dari 26 titik yang terletak pada persegi panjang berukuran 20 cm dan 15 cm, tunjukkan bahwa paling sedikit ada dua titik yang jaraknya 5 cm.

Latihan:

1. Buatlah contoh soal dan jawab yang berkaitan dengan prinsip sarang burung, yang berbeda dengan yang ada di contoh pada catatan kuliah.
2. Buatlah soal dan jawab seperti pada soal kelereng pada catatan kuliah.

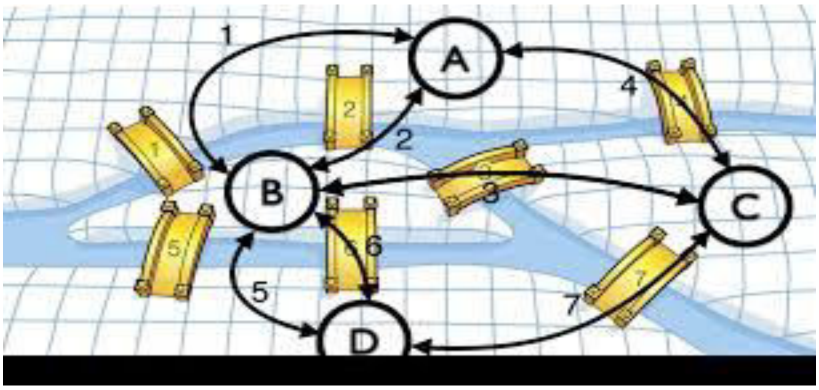
BAB 4
GRAF

4.1 Pendahuluan

Sejarah terciptanya graf dimulai dari masalah jembatan Königsberg. Pada abad ke-18, Königsberg merupakan ibu kota dari Prussia Timur. Di kota tersebut mengalir sungai Pregel. Mendekati pulau Kneiphof, sungai ini bercabang dua mengelilingi pulau tersebut. Tujuh jembatan melintasi sungai, yang menghubungkan antara daratan dan pulau tersebut. Masyarakat sekitar mempertanyakan apakah mungkin seseorang berangkat dari satu titik, kemudian melintasi setiap jembatan tepat satu kali, lalu kembali ke titik semula, tanpa basah badannya.

Gambar 4.1 Jembatan Königsberg

Seorang matematikawan Swiss, Léonhard Euler (1707-1783) memecahkan masalah tersebut dengan membuat model dari masalah yang ada. Ia berpendapat bahwa gambaran dari wilayah (*land*), air (*water*) dan jembatan (*bridge*) dapat dibuat model grafnya. Dengan memisalkan wilayah sebagai titik (simpul/*vertex*) A, B, C, D dan jembatan sebagai garis (sisi/*edge*), yang dapat merupakan garis lurus atau kurva melengkung, yang menghubungkan antara empat wilayah tersebut, maka graf dibuat sebagai representasi d**ari masalah jembatan Königsberg** (lihat Gambar 4.2)**.**



Gambar 4.2 Representasi Grafik dari Masalah Jembatan Königsberg

Masalah fisik jembatan berubah menjadi masalah matematika. Dengan memilih satu simpul tertentu, kemudian bergerak mengikuti sisi-sisi yang ada tepat satu kali dan kembali ke simpul semula adalah sesuatu hal yang tidak mungkin. Dengan pemodelan dalam bentuk graf ini, Euler berhasil menjawab masalah jembatan Königsberg, yaitu tidak mungkin seseorang berangkat dari satu titik, kemudian menyeberang setiap jembatan tepat sekali dan kembali ke titik awal.

4.2 Definisi Graf

Graf adalah pasangan himpunan (V,E), dimana;

V = himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertexes*)

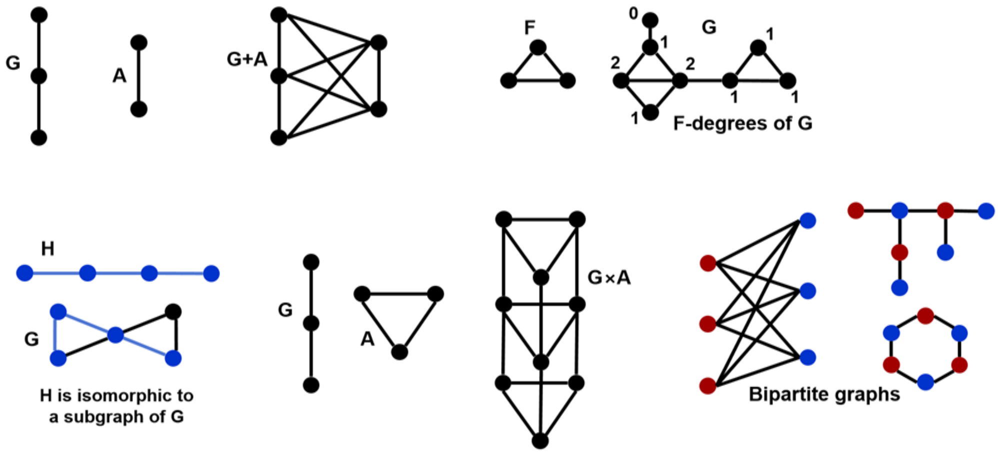
E = himpunan sisi-sisi (*edges atau arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul

Notasi G = (V,E)

Secara geometri graf digambarkan sebagai kumpulan noktah (simpul) yang dihubungkan dengan sekumpulan garis (sisi)

Himpunan simpul dari graf *G* ditulis dengan *V*(*G*), sedangkan himpunan sisi dari graf *G* dinyatakan dengan *E*(*G*). Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti a, b, c, d, … dengan bilangan asli 1, 2, 3, …

Sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u,v) atau dengan lambang $e_1, e_2, e_3, ...$. Dengan kata lain, jika e menghubungkan u dan v, maka e dapat ditulis $e = (u, v)$.
Berikut ini adalah beberapa contoh dari graf (gambar diambil dari internet):



4.3 Menggambar Graf

Lemma Jabat Tangan:

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut.

Dengan kata lain, jika G = (V,E), maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Berdasarkan lemma tersebut, maka kita dapat menggambarkan suatu graf, apabila barisan derajat setiap simpulnya diberikan.

Syarat untuk dapat menggambar suatu graf,

1. Jumlah derajat semua simpul selalu genap
2. Banyaknya simpul berderajat ganjil selalu genap
3. Logis

Syarat ke-3 tersebut harus diperhatikan dengan baik, karena kadang dari barisan derajat yang diberikan, sulit digambarkan grafnya karena tidak logis.

Latihan:

1. Coba gambarkan graf sederhana yang mempunyai barisan derajat sebagai berikut:

   a) 5, 4, 4, 3, 2, 2

   b) 1, 1, 1, 1, 1, 1

   c) 5, 5, 4, 4, 3, 2, 1

   d) 5, 5, 4, 3, 2, 1

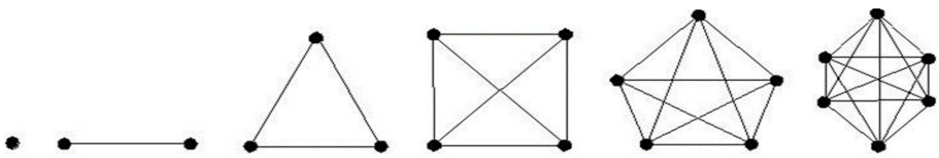
2. Tentukan banyaknya sisi suatu graf yang mempunyai 6 simpul dengan 4 simpul berderajat 2 dan 2 simpul berderajat 4.

4.4 Beberapa Graf Sederhana Khusus

1. Graf Lengkap: yaitu graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya.

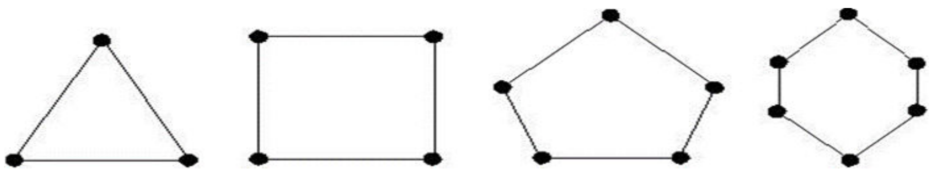
Notasi graf lengkap dengan n simpul adalah K_n. Jumlah sisi pada K_n adalah $n(n-1)/2$.

Contoh:



2. Graf Lingkaran: yaitu graf sederhana yang setiap simpulnya berderajat dua.

Berikut ini adalah contoh dari graf lingkaran.



3. **3.** Graf Teratur: yaitu graf yang setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama.

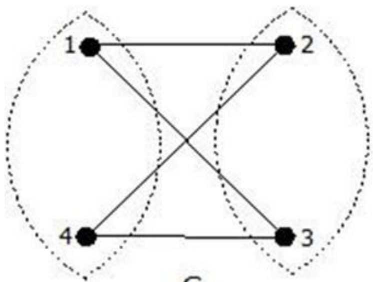
   Graf Teratur derajat r: yaitu graf teratur yang simpulnya mempunyai derajat r.

   Contohnya: graf lengkap dan graf lingkaran.

4. **4.** Graf Bipartit: yaitu graf G yang himpunan simpulnya dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian sehingga setiap sisi pada G menghubungkan sebuah simpul di V_1 ke sebuah simpul di V_2.

   Notasi untuk graf bipartit: G (V_1, V_2)

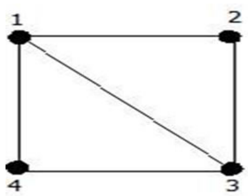
   Contoh: V = {1, 2, 3, 4}, V_1 = {1, 4}, V_2 = {2, 3}

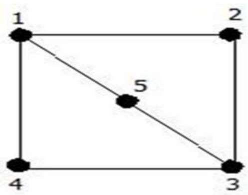


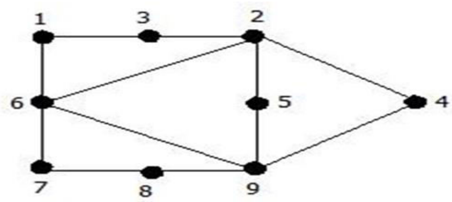
G

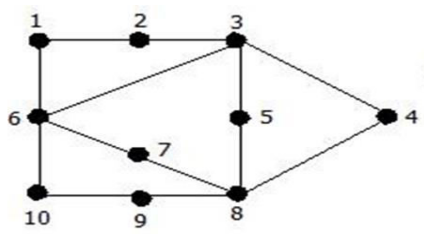
Latihan:

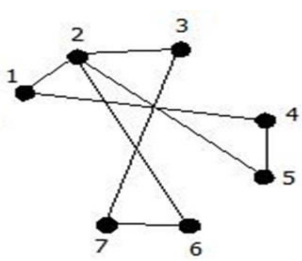
Selidiki apakah graf berikut merupakan graf bipartit atau bukan.

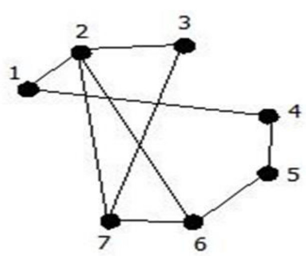






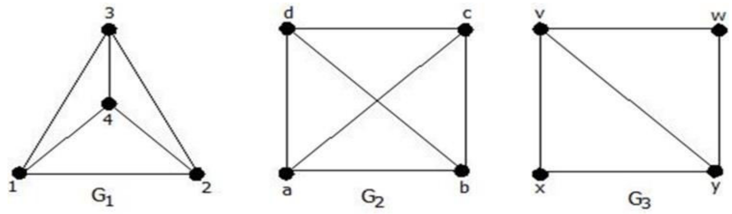






4.5 Graf Isomorfik

Perhatikan graf-graf berikut ini:



Sebutkan beberapa kesamaan dari graf tersebut, terkait dengan simpul, sisi dan ba risan derajatnya. Apakah graf-graf tersebut sama atau berbeda?

DEFINISI-1:

Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan **isomorfik** jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian rupa sehingga jika sisi *e* bersisian dengan simpul *u* dan *v* di G_1, maka sisi *e'* juga harus bersisian dengan simpul *u'* dan *v'* di G_2.

DEFINISI-2:

Diketahui graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$.

G_1 **isomorfik** dengan G_2 ditulis $G_1 \approx G_2$ jika ada fungsi satu-satu φ dari V_1 pada V_2 sedemikian sehingga:

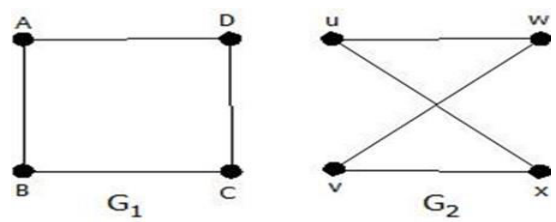
Jika vw sisi di E_1, maka $\varphi(v)\ \varphi(w)$ sisi di E_2 dan

Setiap sisi di E_2 mempunyai bentuk $\varphi(v)\ \varphi(w)$ untuk suatu vw $\in E_1$.

Dikatakan φ isomorfik dari G_1 ke G_2 yaitu φ: G_1 --> G_2 sebuah isomorfik jika

φ: G_1 - -> G_2 isomorfisme maka φ^{-1}: G_2 --> G_1 juga isomorfisme.

Contoh:

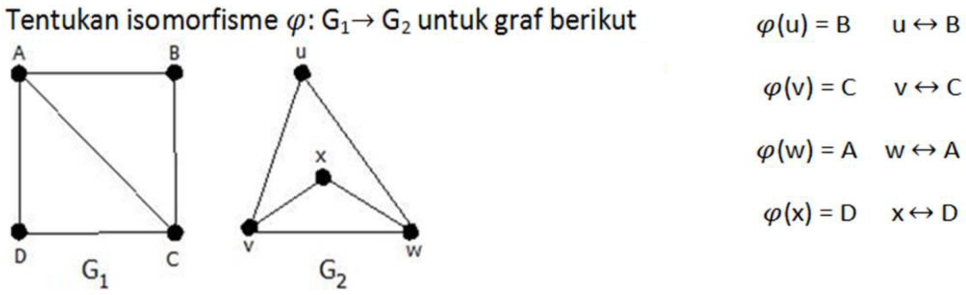


u ↔ A $\varphi(u) = A$

v ↔ C $\varphi(v) = C$

w ↔ D $\varphi(w) = D$

x ↔ B $\varphi(x) = B$



Proposisi:

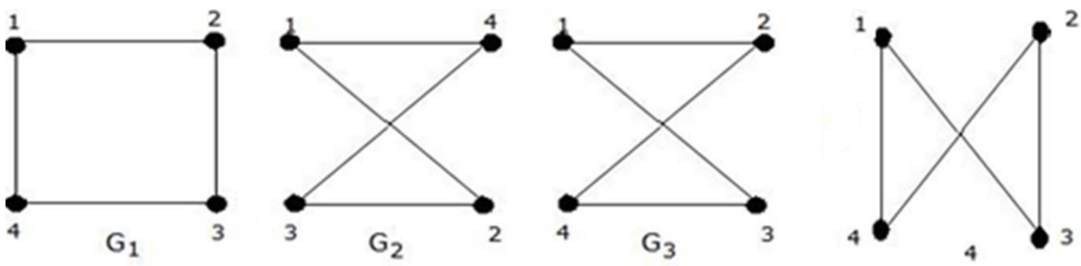
Jika G_1 dan G_2 graf isomorfik, maka:

1. G_1 dan G_2 mempunyai jumlah simpul yang sama
2. G_1 dan G_2 mempunyai barisan derajat yang sama
3. G_1 dan G_2 mempunyai jumlah sisi yang sama.

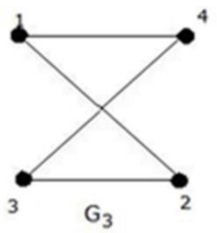
Teorema:

Dua buah graf G_1 dan G_2 isomorfik jika dan hanya jika simpul-simpulnya dapat dilabel sedemikian rupa sehingga matriks ketetanggaan yang bersesuaian sama.

Contoh:

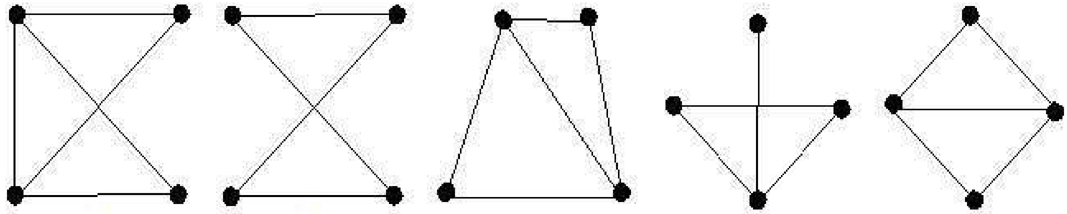


- G_1 isomorfik dengan G_2
- G_1 tidak isomorfik dengan G_3
- G_1 tidak isomorfik dengan G_4
- G_1 isomorfik dengan G_3 jika G_3 dilabel ulang



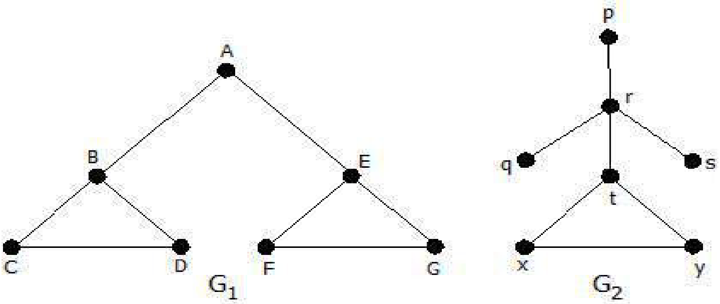
Latihan:

1. Tentukan pasangan graf yang isomorfik dari graf-graf berikut ini:

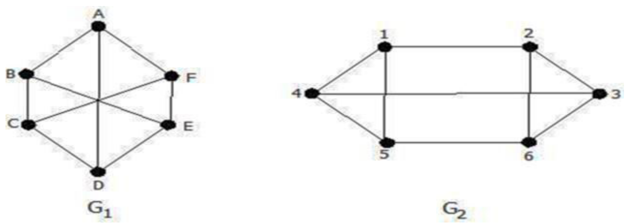


G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

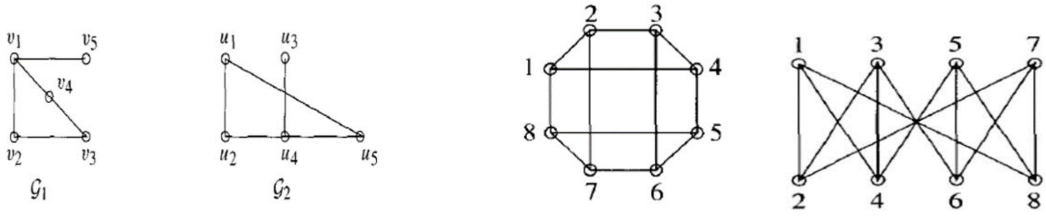
2. Selidiki apakah dua graf berikut isomorfik.



3. Perhatikan kedua graf brikut ini. Berapa banyak sisi, simpul dan derajat simpul pada graf tersebut? Apakah kedua graf tersebut isomorfik?



4. Selidiki apakah dua pasang graf berikut isomorfik:



G_3 G_4

4.6 Aplikasi Graf

Lintasan terpendek di dalam graf merupakan salah satu persoalan optimasi. Graf yang digunakan adalah graf berbobot (*weighted graph*). Asumsi yang digunakan adalah bahwa semua bobot bernilai positif. Terpendek berarti meminimisasi bobot pada suatu lintasan di dalam graf.

Macam-macam masalah lintasan terpendek:

1. Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu
2. Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul
3. Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain
4. Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

4.6.1. Algoritma Dijkstra

Algoritma Dijkstra digunakan untuk mencari lintasan terpendek (S.P = *Shortest Path*) dan jarak terpendek (S.D = S*hortest Distance*) dari suatu simpul tertentu ke simpul lainnya.

Misalkan ada suatu graf berbobot dengan simpul awal A dan simpul akhir E.

Tahap 1: beri label A dengan (__, 0)

Tahap 2:

1. Untuk setiap simpul u, misal u mempunyai label (x, d) dengan:

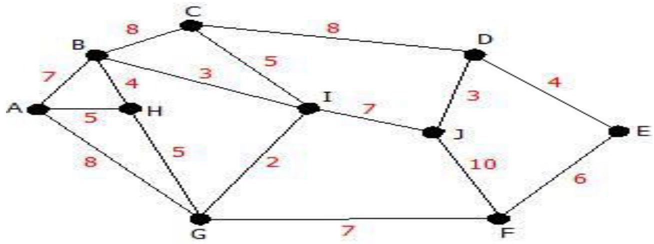
   x = simpul awal

   d = jarak terpendek dari A
2. Untuk setiap simpul tidak berlabel v yang bertetangga dengan u hitung d + w(e), dengan e = sisi uv dan w(e) = bobot sisi e
3. Ambil simpul berlabel u, dan simpul tetangga tidak berlabel v, yang jumlah $d' = d + w(e)$ minimum dan nyatakan v dengan label (u, d'). Beri label semua simpul yang berkaitan, yang jumlah d + w(e)-nya minimum. Jika suatu simpul dapat diberi label (x, d') untuk beberapa simpul x, pilih salah satu.

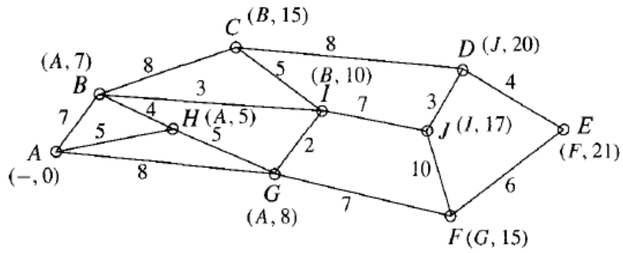
4. Ulangi terus tahap 2 sampai simpul E diberi label atau tidak ada lagi simpul yang diberi label.

Contoh:

Tentukan SP (*Short Path* = lintasan terpendek) dan SD (*Short Distance* = jarak terpendek) dari graf berikut ini, simpul awal A dan simpul akhir E:



Solusinya:

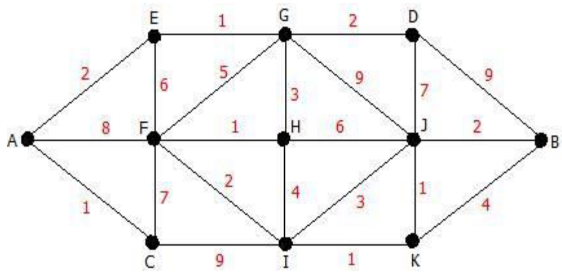


SP nya adalah A, G, F, E dan SD nya sebesar 21.

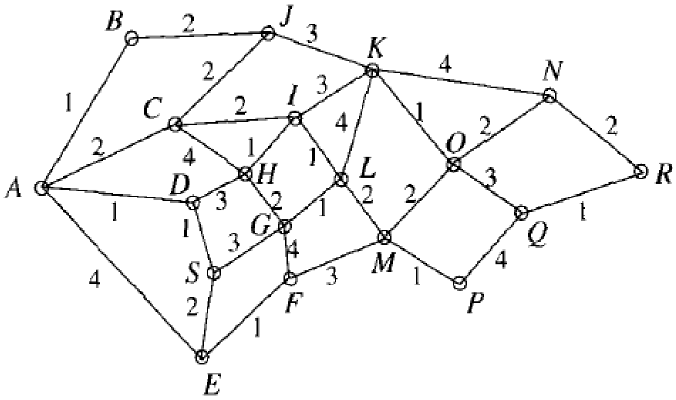
Latihan:

Tentukan SP dan SD dari graf berikut ini:

1.



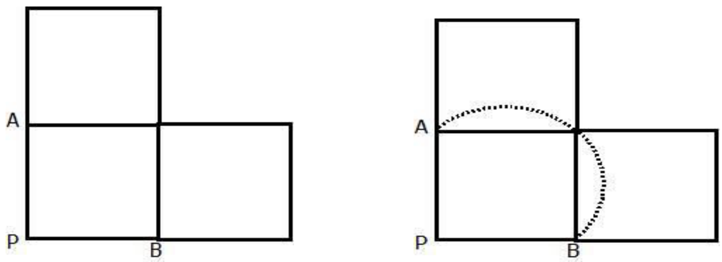
2.



4.6.2 Masalah Tukang Pos Cina

Masalah tukang pos Cina dikemukakan pertama kali oleh H.E Dudency (1517), lalu dikaji secara mendalam oleh matematikawan China yang bernama Mei-Ko Kwan (Meigo Guan). Misalkan seorang tukang pos berangkat dari kantor posnya untuk mengantarkan surat dan barang-barang pos lainnya tersebut ke alamat yang dituju. Tukang pos tersebut harus melewati semua rute/jalan, darimanapun letak kantor posnya. Bagaimana rencana tukang pos untuk meminimalkan jarak rutenya?

Perhatikan graf berikut:

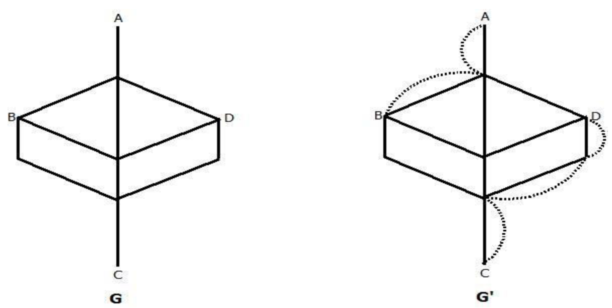


Algoritma masalah tukang pos digunakan untuk menentukan Pseudograf Euler ("Eulerian") yang berbobot minimum dengan menduplikasi sisi pada graf terhubung berbobot G

Perhatikan algoritma masalah tukang pos Cina berikut:

Tahap 1	Tentukan semua simpul berderajat ganjil di G
Tahap 2	Bentuk pasangan simpul-simpul berderajat ganjil ke dalam partisi-partisi $\{V_1, W_1\}, \{V_2, W_2\}, \ldots, \{V_n, W_n\}$ dan tentukan panjang lintasan terpendek antara V_i dan W_i dan tambahkan panjangnya
Tahap 3	Ambil partisi yang jumlahnya minimal di tahap 2 dan untuk setiap pasang (V_i, W_i) simpul dalam partisi ini diduplikasi sisi-sisi sepanjang lintasan terpendek dari V_i ke W_i

Contoh:

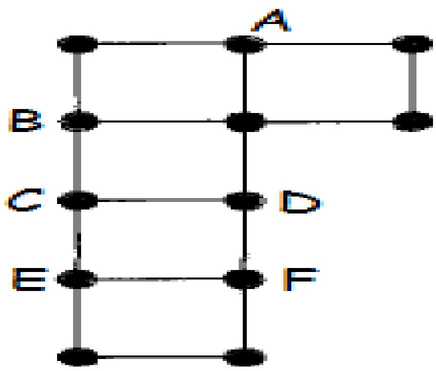


Berdasarkan algoritma masalah tukang pos, graf di atas dapat dipartisi dalam bentuk pasangan dan ditentukan jumlah panjang lintasan terpendeknya, seperti pada tabel tersebut, sehingga dapat disimpulkan bahwa jumlah Panjang lintasan terpendeknya adalah 5, dengan partisi pasangannya adalah {A,B}, {C,D}.

Partisi ke dalam pasangan-pasangan	**Jumlah panjang lintasan terpendek**
{A,B}, {C,D}	2 + 3 = 5*
{A,C}, {B,D}	4 + 2 = 6
{A,D}, {B,C}	2 + 3 = 5*

Latihan:

Carilah jumlah Panjang lintasan terpendeknya dan gambarkan pseudografnya.



DAFTAR PUSTAKA

Balakrishnan, V.K. (1991). *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. & Sherbert, Donald R. (2000). *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd.

Cupillari, Antonella (2005). *The Nuts and Bolts of Proofs* (Third Edition). Burlington, MA.: Elsevier Academic Press.

Goodaire, Edgar G. & Parmenter, Michael M. (1998). *Discrete Mathematics with Graph Theory*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Kolman, Bernard & Busby, Robert C. (1987). *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*. Second Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Munir, Rinaldi. (2012). *Matematika Diskrit* (Revisi ke-5). Bandung: Penerbit Informatika.

Sollow, Daniel (1990). *How to Read & Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes*. New York: John Wiley & Sons.

Velleman, Daniel J. (2006). *How to Prove It*. Cambridge, U.K. Cambridge University Press: